ΘΕΩΡΙΑ ΤΕΛΕΣΤΩΝ (Θ.13-Ε.20)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΙΙ

(παράδοση 23/11/2020)

Άσκηση 1. **(α)** *Δείξτε ότι κάθε *-μορφισμός* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *μεταξύ C* αλγεβρών χωρίς μονάδα επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μοναδιαίο *-μορφισμό* $\Phi^{\sim} : \tilde{\mathcal{A}} \to \tilde{\mathcal{B}}$ *θέτοντας* $\Phi^{\sim}(a + \lambda\mathbf{1}) = \Phi(a) + \lambda\mathbf{1}$. *Αν η* $\mathcal{B}$ *έχει μονάδα τότε ο* Φ *επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μοναδιαίο *-μορφισμό* $\Phi^{\sim} : \tilde{\mathcal{A}} \to \mathcal{B}$.

(β) *Αν* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *είναι *-μορφισμός, δείξτε ότι* $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a) \cup \{0\}$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}$. *Αν οι* $\mathcal{A}$ *και* $\mathcal{B}$ *έχουν μονάδα και* $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ *δείξτε ότι* $\sigma(\Phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ *για κάθε* $a \in \mathcal{A}$.

Στα επόμενα, η A είναι μια C* άλγεβρα *πεπερασμένης διάστασης*. Στόχος είναι να δείξουμε ότι η A έχει αναγκαστικά μονάδα και ότι έχει πεπερασμένο πλήθος χαρακτήρων.

Άσκηση 2. *Αν* B *είναι* μεταθετική *υπάλγεβρα της* A, *δείξτε ότι είναι ισομετρικά ισόμορφη με την C* άλγεβρα* $\mathbb{C}^k$ *όπου* $k \in \mathbb{N}$ *ή ισοδύναμα με την* $C(K)$ *όπου* K *πεπερασμένο σύνολο με την διακριτή τοπολογία.*

Συνεπώς κάθε μεταθετική C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης έχει μονάδα και πεπερασμένο, άρα συμπαγές, σύνολο χαρακτήρων.

Άσκηση 3. *Αν* $\dim A > 1$, *δείξτε ότι η* A *περιέχει μια μη τετριμμένη προβολή, δηλαδή ένα* $p \in A$ *με* $p = p^2 = p^*$ *που είναι μη μηδενικό και δεν είναι μονάδα της* A.

Άσκηση 4. *Δεν έχουν όλες οι C* άλγεβρες μη-τετριμένες προβολές: δείξτε (για παράδειγμα) ότι η* $C([0,1]$ *δεν έχει καμμία.*

Άσκηση 5. *Αν* ϕ *και* ψ *είναι δυο διαφορετικοί χαρακτήρες της* A, *δείξτε ότι υπάρχει μια προβολή* $p \in A$ *ώστε* $\phi(p) \neq \psi(p)$.

Άσκηση 6. *Αν* ϕ *και* ψ *είναι δυο χαρακτήρες της* A *και* $\|\phi - \psi\| < 1$ *(η νόρμα είναι του δυικού της* A*), δείξτε ότι τότε* $\phi = \psi$.

Άσκηση 7. *Αν* E *είναι χώρος με νόρμα πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι η ασθενής *-τοπολογία στον δυικό χώρο* E^* *ταυτίζεται με την τοπολογία της νόρμας του* E^*.

Άσκηση 8. *Δείξτε ότι μια C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος χαρακτήρων.*

Άσκηση 9. *Δείξτε ότι κάθε C* άλγεβρα πεπερασμένης διάστασης έχει μονάδα.*