Σημειώσεις πάνω στα Τανυστικά γινόμενα γραμμικών χώρων

Αλέξανδρος Χατζηνικολάου

1 Αλγεβρικά Τανυστικά Γινόμενα

Έστω E, F γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$.

Ορισμός 1.1. *<u>Τανυστικό γινόμενο</u> των E και F ονομάζεται ένα ζεύγος (M, φ), όπου M ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $\varphi : E \times F \to M$ μια διγραμμική απεικόνιση που ικανοποιούν τα εξής:*

1. $M = span\{\varphi(x, y) : x \in E, y \in F\}$
2. *Έστω $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\varphi(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

Όπως θα δούμε, τανυστικό γινόμενο μεταξύ γραμμικών υπάρχει, είναι μοναδικό (up to isomorphisms) και ικανοποιεί τη λεγόμενη καθολική ιδιότητα.

<u>Υπενθύμιση</u>: Βάση Hamel $X \subseteq E$ ενός γραμμικού χώρου E λέμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του που τον παράγει. Δηλαδή, ένα σύνολο $X = \{x_i : i \in S\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $u \in E$, υπάρχουν πεπερασμένο υποσύνολο $I \subseteq S$, $u(i) \in \mathbb{K}$ και γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία $x_i \in X$, $i \in I$, τέτοια ώστε να γράφεται μοναδικά στη μορφή $u = \sum_{i \in I} u(i)\, x_i$.
Κάθε γραμμικός χώρος έχει βάση Hamel (Λήμμα του Zorn).

Παρατήρηση 1.2. *Αν E και F είναι $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι, τότε μπορούμε να τους αναπαραστήσουμε ως χώρους συναρτήσεων πάνω σε κάποια σύνολα. Δηλαδή,* *υπάρχουν σύνολα* S, T *τέτοια ώστε* $E \hookrightarrow \mathbb{K}^S$ *και* $F \hookrightarrow \mathbb{K}^T$. *Πράγματι, έστω* $\{x_i\}_{i\in S}$, $\{y_j\}_{i\in T}$ *οι βάσεις Hamel των* E *και* F. *Τότε, ορίζουμε την απεικόνιση*

$$u = \sum_{i\in I} u(i)\, x_i \mapsto u_f$$

όπου $u_f : S \to \mathbb{K}$, *η συνάρτηση η οποία ικανοποιεί,* $u_f(i) = u(i)$ *για κάθε* $i \in I$ *και μηδενίζεται έξω από το* I. *Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμικός ισομορφισμός του* E *με κάποιον υπόχωρο του* $\mathbb{K}^S$.

Θεώρημα 1.3 (Ύπαρξη). *Αν* E *και* F *δύο γραμμικοί χώροι πάνω από το* $\mathbb{K}$, *τότε ύπαρχει (τουλάχιστον) ένα ταυνστικό γινόμενο των* E *και* F.

Απόδειξη. Ταυτίζοντας τον χώρο E με την εικόνα του στον χώρο $\mathbb{K}^S$, θα θεωρούμε τα στοιχεία του $x \in E$ ως συναρτήσεις $x : S \to \mathbb{K}$. Ομοίως και για τον χώρο F. Ορίζουμε τον χώρο $M = span\{x \otimes y : x \in E, y \in F\} \subseteq \mathbb{K}^{S\times T}$ να είναι η γραμμική θήκη των συναρτήσεων

$$\begin{aligned} x \otimes y :& S \times T \to \mathbb{K} \\ &(s, t) \mapsto x(s)y(t), \end{aligned}$$

και η διγραμμική απεικόνιση να είναι η $\phi : E \times F \to M : (x, y) \to x \otimes y$. Εύκολα ελέγχεται ότι η ϕ είναι διγραμμική και είναι άμεσο επίσης ότι η εικόνα της παράγει τον χώρο. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε τη δεύτερη συνθήκη. Έστω $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, και υποθέτω ότι

$$\sum_{(i,j)\in L} \lambda_{i,j}\phi(x_i, y_j) = \sum_{(i,j)\in L} \lambda_{i,j} x_i \otimes y_j = 0,$$

όπου $L \subseteq I \times J$ πεπερασμένο σύνολο. Τότε έχουμε ότι για κάθε $s \in S$,

$$\sum_{(i,j)\in L} \lambda_{i,j} x_i(s) y_j = \sum_{j} \Big(\sum_{i} \lambda_{i,j} x_i(s) \Big) y_j = 0 \quad \text{στον } Y$$

και αφού $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ γραμμικά ανεξάρτητο, έπεται ότι $\sum_i \lambda_{i,j} x_i(s) = 0$ για κάθε $s \in S$ και για κάθε j. Άρα, έχουμε ότι $\sum_i \lambda_{i,j} x_i = 0$ στον E και αφού και τα $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τελικά $\lambda_{i,j} = 0$ για κάθε ζεύγος (i, j). $\square$

Πρόταση 1.4. *Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και (M, ϕ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Έστω επίσης $\{x_a : a \in A\} \subseteq E$ και $\{y_b : b \in B\} \subseteq F$ βάσεις Hamel. Τότε, το σύνολο $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$ είναι βάση Hamel του χώρου M.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό, το σύνολο $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι παράγει τον χώρο M, δηλαδή ότι κάθε $u \in M$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$. Πράγματι, έστω $u = \sum_{i=1}^{k} \phi(x_i, y_i)$ μια αναπαράσταση του u. Για κάθε $i = 1, \ldots, k$, γράφουμε $x_i = \sum_{a \in A'} \lambda_a(x_i) x_a \in E$ όπου $A' \subseteq A$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του A και $y_i = \sum_{b \in B'} \mu_b(y_i) y_b \in F$, όπου $B' \subseteq B$ πεπερασμένο υποσύνολο του B και $\lambda_a(x_i), \mu_b(y_i) \in \mathbb{K}$ για κάθε i, a, b. Τότε, λόγω της διγραμμικότητας της ϕ, γράφουμε

$$u = \sum_{i=1}^{k} \phi(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^{k} \phi\Big(\sum_{a \in A'} \lambda_a(x_i) x_a, \sum_{b \in B'} \mu_b(y_i) y_b \Big) = \sum_{i,a,b} \lambda_a(x_i) \mu_b(y_i) \phi(x_a, y_b).$$

□

Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και (M, ϕ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Αν G ένας άλλος γραμμικός χώρος, τότε κάθε γραμμική απεικόνιση $B : M \to G$ ορίζει μια διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$ μέσω της σχέσης $b(x, y) = B(\phi(x, y))$. Η καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου, μας λέει ότι όλες οι γραμμικές απεικονίσεις από το M στο G είναι αυτής της μορφής.

Θεώρημα 1.5 (Καθολική Ιδιότητα)**.** *Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$-γραμμικοί χώροι και (M, ϕ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Για κάθε $\mathbb{K}$-γραμμικό χώρο G και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : M \to G$ τέτοια ώστε $B(\phi(x, y)) = b(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in E \times F$. Ισοδύναμα, υπάρχει $B : M \to G$ ώστε το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "b"] \arrow[dr, "\phi"'] & G \\ & M \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd}$$

να είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Έστω $\{x_a : a \in A\}$ και $\{y_b : b \in B\}$ βάσεις Hamel των E και F αντίστοιχα. Όπως είδαμε, το σύνολο $\{\phi(x_a, y_b) : (a, b) \in A \times B\}$ είναι βάση Hamel του χώρου M. Ορίζουμε λοιπόν απεικόνιση $B : M \to G$ με $B(\phi(x_a, y_b)) := b(x_a, y_b)$ και επεκτείνουμε γραμμικά ώστε

$$B(\sum_{(a,b)\in C} \lambda_{a,b}\phi(x_a, y_b)) = \sum_{(a,b)\in C} \lambda_{a,b} b(x_a, y_b)$$

για κάθε $C \subseteq A \times B$ πεπερασμένο υποσύνολο. Η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη και για κάθε $u = \sum_{i=1}^{k} \phi(x_i, y_i) \in M$ ισχύει ότι $B(u) = \sum_{i=1}^{k} b(x_i, y_i)$. Επιπλέον, είναι μοναδική αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχει και άλλη $B' : M \to G$ με $B'(\phi(x, y)) = b(x, y)$, τότε $B = B'$ καθώς $B'(\phi(x, y)) = b(x, y) = B(\phi(x, y))$ για κάθε $x \in E, y \in F$ και τα $\phi(x, y)$ παράγουν τον χώρο M. $\square$

Θεώρημα 1.6 (Μοναδικότητα)**.** *Αν (M_1, ϕ_1) και (M_1, ϕ_1) δύο τανυστικά γινόμενα των γραμμικών χώρων E και F τότε, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $\pi : M_1 \to M_2$ ώστε $\pi \circ \phi_1 = \phi_2$. Ισοδύναμα, το διάγραμμα*

$$\begin{tikzcd} & E \times F \arrow[dl, "\phi_1"'] \arrow[dr, "\phi_2"] & \\ M_1 \arrow[rr, "\pi"] & & M_2 \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό.

Απόδειξη. Από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου (M_1, ϕ_1), επιλέγοντας για γραμμικό χώρο $G = M_2$ και διγραμμική απεικόνιση $b = \phi_2$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B_1 : M_1 \to M_2$ τέτοια ώστε $B_1 \circ \phi_1 = \phi_2$

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[dr, "\phi_1"'] & M_2 \\ & M_1 \arrow[u, "B_1"'] \end{tikzcd}$$

Εφαρμόζοντας και πάλι την καθολική ιδιότητα, αυτή τη φορά για το τανυστικό γινόμενο (M_2, ϕ_2) και επιλέγοντας για γραμμικό χώρο τον $G = M_1$ και διγραμμική απεικόνιση $b = \phi_1$, έπεται ότι υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B_2 : M_2 \to M_1$ τέτοια ώστε $B_2 \circ \phi_2 = \phi_1$

$$\begin{tikzcd} E\times F \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[dr, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[d, "B_2"] \\ & M_1 \end{tikzcd}$$

Από τις σχέσεις που προκύπτουν, έχουμε ότι $\varphi_2 = B_1 \circ \varphi_1 = B_1 \circ (B_2 \circ \varphi_2)$, επομένως $\varphi_2 = (B_1 \circ B_2) \circ \varphi_2$ και αφού οι απεικονίσεις B_1, B_2 είναι μοναδικές, έπεται ότι $B_1 \circ B_2 = \mathrm{id}_{M_2}$. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι $\varphi_1 = (B_2 \circ B_1) \circ \varphi_1$ απ'όπου συμπεραίνουμε και πάλι ότι $B_1 \circ B_2 = \mathrm{id}_{M_1}$. Αυτό σημαίνει ότι οι B_1 και B_2 είναι η μία αντίστροφη της άλλης και άρα 1-1 και επί. □

Σημείωση 1.7. *Είδαμε λοιπόν ότι ανάμεσα σε δύο γραμμικούς χώρους, όλα τα ταυστικά γινόμενα είναι μεταξύ τους ισόμορφα. Από εδώ και πέρα λοιπόν, το αλγεβρικό ταυστικό γινόμενο M δύο γραμμικών χώρων E και F θα το συμβολίζουμε με $E \otimes F$ και τη διγραμμική απεικόνιση $\varphi : E \times F \to E \otimes F$ με*

$$(x, y) \mapsto x \otimes y.$$

Δηλαδή, το ταυστικό γινόμενο των χώρων E και F, είναι ένας γραμμικός χώρος $E \otimes F$ της μορφής

$$E \otimes F = span\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

και κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ σε αυτόν τον χώρο έχει μια αναπαράσταση (όχι μοναδική) της μορφής

$$u = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$$

όπου $x_i \in E$ και $y_i \in F$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Κάθε στοιχείο της μορφής $x \otimes y$ ονομάζεται <u>στοιχειώδης ταυστής</u> (elementary tensor) ή <u>απλός ταυστής</u> (simple tensor).

Λήμμα 1.8. *Έστω E, F, M γραμμικοί χώροι και $\varphi : E \times F \to M$ μια διγραμμική απεικόνιση. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Έστω $\{x_i : i = 1, \ldots, r\} \subseteq E$ και $\{y_j : j = 1, \ldots, s\} \subseteq F$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\varphi(x_i, y_j)\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*

2. *Έστω* $\{x_1,\ldots,x_r\}\subseteq E$ *και* $\{y_1,\ldots,y_r\}\subseteq F$ *είναι δύο πεπερασμένα σύνολα που ικανοποιούν την*

$$\sum_{i=1}^{r}\phi(x_i,y_i)=0.$$

Τότε, αν $x_1,\ldots,x_r$ *γραμμικά ανεξάρτητα, τότε* $y_1=\cdots=y_r=0$, *ενώ αν τα* $y_1,\ldots,y_r$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε* $x_1=\cdots=x_r=0$.

Απόδειξη. (1. $\Rightarrow$ 2.) Έστω $\{x_1,\ldots,x_r\}\subseteq E$ και $\{y_1,\ldots,y_r\}\subseteq F$ πεπερασμένα και έστω ότι τα $x_1,\ldots,x_r$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Τότε, αν $\{f_k\}$ μια βάση για τον υπόχωρο $span\{y_i\}\subseteq F$, γράφουμε $y_i=\sum_k \lambda_{i,k}f_k$ και αν υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^r\phi(x_i,y_i)=0$, παίρνουμε $\sum_{i,k}\lambda_{i,k}\phi(x_i,f_k)=0$. Από υπόθεση λοιπόν $\lambda_{i,k}=0$ για κάθε i,k και κατά συνέπεια όλα τα y_i είναι ίσα με το μηδέν. Ομοίως αν τα $y_1,\ldots,y_r$ είναι γρ. ανεξάρτητα.
(2. $\Rightarrow$ 1.) Έστω $\{x_i : i=1,\ldots,r\}\subseteq E$ και $\{y_j : j=1,\ldots,s\}\subseteq F$ γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα που ικανοποιούν $\sum_{i,j}\lambda_{i,j}\phi(x_i,y_j)=0$. Τότε έχουμε ότι $\sum_j\phi(\sum_i\lambda_{i,j}x_i,y_j)=0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\sum_i\lambda_{i,j}x_i=0$ και άρα $\lambda_{i,j}=0$ για κάθε i,j λόγω γραμμικής ανεξαρτησίας.

□

Η παραπάνω πρόταση μας λέει ότι η δεύτερη συνθήκη στο τανυστικό γινόμενο δύο γραμμικών χώρων μπορεί να αντικατασταθεί με την παραπάνω ισοδύναμη.

Πρόταση 1.9. *Κάθε στοιχείο* $u\in E\otimes F$ *μπορεί να γραφτεί ως ένα πεπερασμένο άθροισμα* $u=\sum_i e_i\otimes f_i$ *ώστε τα* $\{f_i\}\subseteq F$ *να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε τα* $\{e_i\}\subseteq E$ *καθορίζονται μοναδικά απο τα* f_i.

Απόδειξη. Έστω $u=\sum_k x_k\otimes y_k$ μια αναπαράσταση του u. Θεωρούμε τον πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο $span\{y_k\}\subseteq F$, και παίρνουμε μια βάση του, έστω $\{f_i\}$. Γράφουμε $y_k = \sum_i \lambda_{i,k} f_i$ για κάθε k, όπου $\lambda_{i,k} \in \mathbb{K}$, και τότε

$$\begin{aligned} u = \sum_k x_k \otimes y_k &= \sum_k x_k \otimes (\sum_i \lambda_{i,k} f_i) \\ &= \sum_k \sum_i \lambda_{i,k}(x_k \otimes f_i) \\ &= \sum_i (\sum_k \lambda_{i,k} x_k) \otimes f_i \\ &= \sum_i e_i \otimes f_i \end{aligned}$$

όπου θέσαμε $e_i := \sum_k \lambda_{i,k} x_k$ για κάθε i. Τέλος, τα e_i είναι μοναδικά καθορισμένα γιατί αν είχαμε $u = \sum_i e_i' \otimes f_i$, τότε $\sum_i (e_i' - e_i) \otimes f_i = 0$ και αφού τα f_i είναι γραμμικά ανεξάρτητα, απο το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι $e_i' = e_i$ για κάθε i. □

Παρατήρηση 1.10. *Η καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου $E \otimes F$ μας λεέι ότι ο χώρος των διγραμμικών απεικονίσεων $E \times F \to G$ είναι ισόμορφος με τον χώρο των γραμμικών απεικονίσεων $E \otimes F \to G$,*

$$Bil(E \times F, G) \cong L(E \otimes F, G)$$

Παρατήρηση 1.11 (Γραμμικοποίηση)**.** *Αν θέλουμε να ορίσουμε μια γραμμική απεικόνιση, έστω $\Phi : E \otimes F \to G$, τότε μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε την διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \to G$ και από την καθολική ιδιότητα να έχουμε ότι υπάρχει μοναδική τέτοια Φ ώστε $\Phi(x \otimes y) = b(x, y)$. Η γραμμική απεικόνιση Φ ονομάζεται η <u>γραμμικοποίηση</u> της b.*

Πρόταση 1.12. *Έστω $T_i : E_i \to G_i$, για $i = 1, 2$ γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$\begin{aligned} S : E_1 \otimes E_2 &\to G_1 \otimes G_2 \\ x_1 \otimes x_2 &\mapsto T_1(x_1) \otimes T_2(x_2) \end{aligned}$$

την οποία θα συμβολίζουμε με $S := T_1 \otimes T_2$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση $\phi : E_1 \times E_2 \to G_1 \otimes G_2$ με $\phi(x_1, x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$ είναι διγραμμική και κατά συνέπεια από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου $E_1 \otimes E_2$ υπάρχει μοναδική γραμμική S τέτοια ώστε $S(x_1 \otimes x_2) = \phi(x_1, x_2) = T_1(x_1) \otimes T_2(x_2)$. □

Παραδείγματα 1.13. *1.* $E \otimes \mathbb{K} \cong E$

Πράγματι, μπορούμε να δείξουμε ότι ο χώρος (E, ϕ) *με τη διγραμμική απεικόνιση* $\phi : E \times \mathbb{K} \to E : (x, \lambda) \mapsto \lambda x$ *είναι τανυστικό γινόμενο των* E *και* $\mathbb{K}$. *Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι οι χώροι* $E \otimes \mathbb{K}$ *και* E *είναι ισόμορφοι μέσω της απεικόνισης*

$$x \otimes \lambda \mapsto \lambda x.$$

2. $E \otimes \mathbb{K}^n \cong E^n$

Μέσω της απεικόνισης $x \otimes (\xi_i)_{i=1}^n \mapsto (x\xi_i)_{i=1}^n$. *Έτσι ταυτίζουμε κάθε στοιχείο της μορφής* $x \otimes e_i$, *όπου* $\{e_i\}$ *η συνήθης βάση του* $\mathbb{K}^n$, *με το διάνυσμα που έχει* x *στην* i*-οστή θέση και μηδέν οπουδήποτε αλλού. Δηλαδή,*

$$x \otimes e_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ x \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \cong \mathbb{K}^{nm}$

Μέσω της απεικόνισης $(\xi_i)_{i=1}^n \otimes (\eta_j)_{j=1}^m \mapsto (\xi_i \eta_j)_{i,j=1}^{n,m}$.

4. $\mathbb{K}^n \otimes \mathbb{K}^m \cong M_{n,m}(\mathbb{K})$

Μέσω της απεικόνισης $e_i \otimes f_j \mapsto E_{i,j}$, *όπου οι* $\{e_i\}_{i=1}^n$ *και* $\{f_j\}_{j=1}^m$ *είναι οι συνήθεις βάσεις των* $\mathbb{K}^n$ *και* $\mathbb{K}^m$ *αντίστοιχα, ενώ* $E_{i,j}$ *είναι ο* $n \times m$ *πίνακας με 1 στην* (i, j) *θεση και 0 οπουδήποτε αλλού.*

5. $M_{n,m}(\mathbb{K}) \otimes E \cong M_{n,m}(E)$

Μέσω της απεικόνισης $[a_{i,j}] \otimes x \mapsto [a_{i,j}x]$ *όπου* $x \in E$ *και* $a_{i,j} \in \mathbb{K}$.

Άσκηση 1.14. *Έστω* K *και* L *συμπαγείς, Hausdorff τοπολογικοί χώροι και* $C(K)$, $C(L)$ *οι μιγαδικές άλγεβρες των συνεχών συναρτήσεων απο τους* K *και* L *αντίστοιχα, με πράξεις κατά σημείο και νόρμες supremum. Δείξτε ότι :*

1. *Ο χώρος* $C(K) \otimes C(L)$ *είναι πυκνός στον* $C(K \times L)$,

2. *Αν επιπλέον* μ, ν *κανονικά μέτρα Borel στούς* K *και* L *αντίστοιχα, τότε για κάθε* $f \in C(K \times L)$ *ισχύει*

$$\int_K \int_L f \, d\nu \, d\mu = \int_L \int_K f \, d\mu \, d\nu.$$

2 Τανυστικά Γινόμενα Χώρων Hilbert

Ορισμός 2.1. *Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ χώροι Hilbert. Στον χώρο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ορίζουμε την απεικόνιση*

$$\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \rangle_{hs} := \sum_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w_j \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Δηλαδή, αν $h_i \otimes k_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, $i = 1, 2$ έχουμε

$$\langle h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 \rangle_{hs} = \langle h_1, h_2 \rangle_{\mathcal{H}} \langle k_1, k_2 \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Πρόταση 2.2. *Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \times \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$ είναι ένα καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.*

Απόδειξη. 1) Sesquilinear: Σταθεροποιούμε δύο στοιχεία $y \in \mathcal{H}$, $w \in \mathcal{K}$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} b_{y,w} : \mathcal{H} \times \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ (x, z) &\mapsto \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \langle z, w \rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η $b_{y,w}$ είναι διγραμμική απεικόνιση και κατά συνέπεια από την καθολική ιδιότητα του τανυστικού γινομένου υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B_{y,w}$ με

$$\begin{aligned} B_{y,w} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ x \otimes z &\mapsto \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \langle z, w \rangle_{\mathcal{K}}. \end{aligned}$$

Όμως, $B_{y,w}(x \otimes z) = \langle x \otimes z, y \otimes w \rangle_{hs}$ για κάθε στοιχειώδη τανυστή $x \otimes z \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, συνεπώς η

$$\langle \cdot , y \otimes w \rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

είναι μια καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση για κάθε $y \otimes w \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Δηλαδή, αν $u = \sum_i x_i \otimes z_i$ τότε,

$$\langle \sum_i x_i \otimes z_i, y \otimes w \rangle_{hs} = \sum_i \langle x_i \otimes z_i, y \otimes w \rangle_{hs} = \sum_i \langle x_i, y \rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w \rangle_{\mathcal{K}}.$$

Τώρα σταθεροποιούμε ένα $u = \sum_i x_i \otimes z_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, ορίζουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} c_u : \mathcal{H} \times \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ (y, w) &\mapsto \overline{\sum_i \langle x_i, y \rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w \rangle_{\mathcal{K}}} \end{aligned}$$

και πάλι από την καθολική ιδιότητα, αφού η c είναι διγραμμική (λόγω αντιγραμμικότητας των εσωτερικών γινομένων στη δεύτερη θέση) παίρνουμε την μοναδική γραμμική

$$\begin{aligned} C_u : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} &\to \mathbb{C} \\ y \otimes w &\mapsto \overline{\sum_i \langle x_i, y \rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w \rangle_{\mathcal{K}}}. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι η

$$\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \cdot \rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

είναι μια καλά ορισμένη αντιγραμμική απεικόνιση για κάθε επιλογή στοιχείου $u = \sum_i x_i \otimes z_i \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$. Επιπλέον, για κάθε $v = \sum_j y_j \otimes w_j \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \rangle_{hs} &= \sum_j \langle \sum_i x_i \otimes z_i, y_j \otimes w_j \rangle_{hs} \\ &= \sum_j \sum_i \langle x_i \otimes z_i, y_j \otimes w_j \rangle_{hs} \\ &= \sum_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle_{\mathcal{H}} \langle z_i, w_j \rangle_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την γραμμικότητα που δείξαμε προηγουμένως. Τέλος, αν σταθεροποιήσω ένα $v = \sum_j y_j \otimes w_j \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, η απεικόνιση

$$\langle \cdot, \sum_j y_j \otimes w_j \rangle_{hs} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathbb{C}$$

είναι γραμμική γιατί όπως είδαμε $\langle \cdot, \sum_j y_j \otimes w_j \rangle_{hs} = \sum_j \langle \cdot, y_j \otimes w_j \rangle_{hs}$, δηλαδή είναι άθροισμα γραμμικών απεικονίσεων.

2) $\langle u,u\rangle_{hs} \geq 0$: Έστω $u = \sum_i x_i \otimes z_i \in \mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ και $\{e_k : k = 1,\dots,n\}$ ορθοκανονική βάση του υποχώρου $\text{span}\{z_i\} \subseteq \mathcal{K}$. Τότε, ξέρουμε ότι υπάρχουν μοναδικά ξ_k ώστε το u να γράφεται στη μορφή $u = \sum_k \xi_k \otimes e_k$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\langle u,u\rangle_{hs} &= \sum_{k,l} \langle \xi_k, \xi_l\rangle_{\mathcal{H}} \langle e_k, e_l\rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \sum_{k,l} \langle \xi_k, \xi_l\rangle_{\mathcal{H}} \delta_{k,l} \\
&= \sum_{k} \langle \xi_k, \xi_k\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_{k} \|\xi_k\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0.
\end{aligned}$$

Τέλος, από την ίδια σχέση έχουμε ότι $\langle u,u\rangle_{hs} = 0$ ανν $\|\xi_k\|^2_{\mathcal{H}} = 0, \forall k$ και συνεπώς $u = \sum_k 0 \otimes e_k = 0$.

□

Ορισμός 2.3. *Ονομάζουμε $\mathcal{H}\otimes_{hs}\mathcal{K}$ την πλήρωση του χώρου $(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|\cdot\|_{hs} := \langle\cdot,\cdot\rangle_{hs}^{\frac{1}{2}}$ η νόρμα που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε στην προηγούμενη πρόταση.*

Παρατήρηση 2.4. *Παρατηρούμε ότι αν $h \in \mathcal{H}$ και $k \in \mathcal{K}$, τότε*

$$\|h\otimes k\|^2_{hs} = \langle h\otimes k, h\otimes k\rangle_{hs} = \langle h,h\rangle_{\mathcal{H}}\langle k,k\rangle_{\mathcal{K}} = \|h\|^2_{\mathcal{H}}\,\|k\|^2_{\mathcal{K}}\,.$$

Δηλαδή, για κάθε στοιχειώδη ταυυστή $h\otimes k$ η νόρμα ικανοποιεί

$$\|h\otimes k\|_{hs} = \|h\|_{\mathcal{H}}\,\|k\|_{\mathcal{K}}$$

και λέμε ότι είναι μια cross-norm.

Άσκηση 2.5. *Αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq \mathcal{H}$ και $f_j : j \in J\} \subseteq \mathcal{K}$ ορθοκανονικές βάσεις, τότε δείξτε ότι το σύνολο $\{e_i \otimes f_j : (i,j) \in I\times J\}$ είναι ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathcal{H}\otimes_{hs}\mathcal{K}$.*

Παρατήρηση 2.6. *Αν έχουμε $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ δύο χώρους Hilbert πεπερασμένης διάστασης με $\dim\mathcal{H} = n$ και $\dim\mathcal{K} = m$, τότε $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K} = \mathcal{H}\otimes_{hs}\mathcal{K}$ και μάλιστα $\dim\mathcal{H}\otimes\mathcal{K} = mn$.*

Παράδειγμα 2.7. $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^m = \mathbb{C}^n \otimes_{hs} \mathbb{C}^m$.

Παράδειγμα 2.8. $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathbb{C}^n \cong \mathcal{H}^n$ *ισομετρικά, όπου ο* $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}$ *είναι το ευθύ άθροισμα n-αντιγράφων του* $\mathcal{H}$ *που γίνεται χώρος Hilbert με τη νόρμα* $\left\|(h_i)_{i=1}^n\right\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2$. *Πράγματι, θυμόμαστε ότι οι χώροι αυτοί γίνονται ισόμορφοι μέσω της απεικόνισης*

$$h \otimes e_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ h \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Δηλαδή, $h \otimes e_i \mapsto (h\delta_{i,j})_{j=1}^n$ *όπου* e_i *η συνήθης ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{C}^n$. *Όμως, κάθε στοιχείο* $u \in \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathbb{C}^n$ *μπορώ να το γράψω στην μορφή* $u = \sum_{i=1}^n h_i \otimes e_i$, *και τότε θα έχει νόρμα*

$$\left\|\sum_{i=1}^n h_i \otimes e_i\right\|_{hs}^2 = \sum_{i=1}^n \|h_i\|_{\mathcal{H}}^2 = \left\|(h_i)_{i=1}^n\right\|_2^2,$$

που σημαίνει ότι ο ισομορφισμός είναι ισομετρικός.

Άσκηση 2.9. *Δείξτε ότι* $\ell^2(\Gamma) \otimes_{hs} \ell^2(\Delta) \cong \ell^2(\Gamma \times \Delta)$.

Άσκηση 2.10. *Αν* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *και* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου, δείξτε ότι* $L^2(\mu) \otimes_{hs} L^2(\nu) \cong L^2(\mu \times \nu)$.

3 Τανυστικά Γινόμενα Χώρων Τελεστών

Είχαμε δεί ότι αν έχουμε δύο γραμμικές απεικονίσεις $T_i : E_i \to G_2$, $i = 1, 2$ μεταξύ γραμμικών χώρων, μπορούμε να ορίσουμε μοναδική γραμμική απεικόνιση $S : E_1 \otimes E_2 \to G_1 \otimes G_2$ με $S(x \otimes y) = T_1(x) \otimes T_2(y)$ την οποία συμβολίσαμε με $S := T_1 \otimes T_2$. Θα δούμε τώρα ότι αν οι γραμμικές απεικονίσεις μας είναι φραγμένοι τελεστές σε χώρους Hilbert τότε και η μοναδική αυτή γραμμική απεικόνιση επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον χώρο Hilbert τανυστικό γινόμενο που ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο.

Πρόταση 3.1. *Έστω $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ φραγμένοι τελεστές. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $T \otimes S : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} : h \otimes k \mapsto T(h) \otimes S(k)$ η οποία επεκτείνεται σε μοναδικό φραγμένο τελεστή*

$$T \otimes_{sp} S : \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$$

με νόρμα $\left\|T \otimes_{sp} S\right\| = \|T\| \, \|S\|$.

Απόδειξη. Εφοδιάζουμε τον χώρο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ με την νορμα $\| \cdot \|_{hs}$. Θα δείξουμε αρχικά ότι ο τελεστής $T \otimes S : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} : h \otimes k \mapsto T(h) \otimes S(k)$ είναι φραγμένος και έπειτα θα επεκτείνουμε στην πλήρωση λόγω συνέχειας.

Έστω $\mathrm{Id}_{\mathcal{K}}$ ο ταυτοτικός τελεστής στον $\mathcal{B}(\mathcal{K})$. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}} : \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ τέτοια ώστε $T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(h \otimes k) = Th \otimes k$. Έστω ένα στοιχείο $u \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ με αναπαράσταση $u = \sum_i x_i \otimes z_i$, τότε υπάρχουν μοναδικά $\{h_k\} \subseteq \mathcal{H}$ τέτοια ώστε $u = \sum_k h_k \otimes e_k$ όπου $\{e_k\} \subseteq \mathcal{K}$ ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $\mathrm{span}\{z_i\} \subseteq \mathcal{K}$. Έχουμε τότε ότι

$$\begin{aligned}
\|u\|_{hs}^2 &= \left\| \sum_k h_k \otimes e_k \right\|_{hs}^2 \\
&= \sum_{k,l} \langle h_k, h_l \rangle_{\mathcal{H}} \langle e_k, e_l \rangle_{\mathcal{K}} \\
&= \sum_k \langle h_k, h_k \rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \sum_k \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\left\| T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}(\sum_k h_k \otimes e_k) \right\|_{hs}^2 &= \left\| \sum_k Th_k \otimes e_k \right\|_{hs}^2 \\
&= \sum_k \|Th_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \sum_k \|T\|^2 \, \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|T\|^2 \sum_k \|h_k\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|T\|^2 \left\| \sum_k h_k \otimes e_k \right\|_{hs}^2 .
\end{aligned}$$

Από αυτή τη σχέση έπεται ότι ο τελεστής $T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}$ είναι φραγμένος με

$$\|T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}\| \leq \|T\| .$$

Με την ίδια διαδικασία προκύπτει ότι και ο τελεστής $\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S$ είναι φραγμένος, με νόρμα

$$\|\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S\| \leq \|S\| .$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $T \otimes S = (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)$. Πράγματι, για κάθε απλό τανυστή $h \otimes k$ ισχύει ότι

$$(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}}) \circ (\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)(h \otimes k) = (T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}})(h \otimes Sk) = Th \otimes Sk$$

και άρα έχουμε την ισότητα από τη μοναδικότητα της γραμμικής απεικόνισης. Άρα, ο $T \otimes S$ είναι επίσης φραγμένος ως τελεστής στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ (εφοδιασμένο με τη νόρμα $\| \cdot \|_{hs}$) με νόρμα που ικανοποιεί

$$\|T \otimes S\| = \|(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}})(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)\| \leq \|(T \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{K}})\| \, \|(\mathrm{Id}_{\mathcal{H}} \otimes S)\| \leq \|T\| \, \|S\| .$$

Από συνέχεια λοιπόν, επεκτείνεται σε μοναδικό φραγμένο τελεστή στην πλήρωση $\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}$, τον οποίο και συμβολίζουμε με $T \otimes_{sp} S$. Τέλος, αν πάρουμε $h \in \mathcal{H}$ και $k \in \mathcal{K}$ ώστε $\|h\|_{\mathcal{H}} \leq 1$ και $\|k\|_{\mathcal{K}} \leq 1$, τότε

$$\left\| T \otimes_{sp} S \right\| \geq \left\| (T \otimes_{sp} S)(h \otimes k) \right\|_{hs} = \|Th \otimes Sk\|_{hs} = \|Th\|_{\mathcal{H}} \, \|Sk\|_{\mathcal{K}} ,$$

και αφού τα $h \in \mathcal{H}$ και $k \in \mathcal{K}$ ήταν τυχαία, προκύπτει ότι $\left\| T \otimes_{sp} S \right\| \geq \|T\| \, \|S\|$. □

Παρατήρηση 3.2. *Έστω $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο μιγαδικές $*$-άλγεβρες με μονάδες, τότε μπορούμε να μετατρέψουμε και το $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ σε $*$-άλγεβρα με μονάδα, ορίζοντας τον πολλαπλασιασμό και την ενέλιξη ως εξής:*

1. $(a\otimes b)\cdot(c\otimes d) := ac\otimes bd$
2. $(a\otimes b)^* := a^*\otimes b^*$

(και επεκτείνοντας γραμμικά). Επιπλέον, η μονάδα θα είναι η $\mathbf{1}_{\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}} := \mathbf{1}_{\mathcal{A}}\otimes\mathbf{1}_{\mathcal{B}}$.

Παρατήρηση 3.3. *Αν έχουμε $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ δύο C^*-άλγεβρες με μονάδες, μια νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ στην $*$-άλγεβρα $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ θα ονομάζεται $\underline{C^*\text{-cross-norm}}$, αν είναι cross-norm και επιπλέον ικανοποιεί τα*

$$\|x^*x\|_\gamma = \|x\|_\gamma^2 \quad \text{και} \quad \|xy\|_\gamma \le \|x\|_\gamma\,\|y\|_\gamma$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$. Η πλήρωση της $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ με την νόρμα $\|\cdot\|_\gamma$ γίνεται C^*-άλγεβρα που τη συμβολίζουμε με $\mathcal{A}\otimes_\gamma\mathcal{B}$.

Πρόταση 3.4. *Αν $\mathcal{H}$ και $\mathcal{K}$ χώροι Hilbert, τότε η απεικόνιση*

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}\otimes_{hs}\mathcal{K})$$
$$T\otimes S \mapsto T\otimes_{sp} S$$

είναι 1-1 μορφισμός $*$-αλγεβρών. Επομένως, από την εμφύτευση του χώρου αλγεβρικό ταυστικό γινόμενο $\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{B}(\mathcal{K})$ στην C^*-άλγεβρα των φραγμένων τελεστών στον χώρο Hilbert $\mathcal{H}\otimes_{hs}\mathcal{K}$, μπορούμε να ορίσουμε την νόρμα $\|\cdot\|_{sp}$ στον $\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{B}(\mathcal{K})$ θέτοντας

$$\left\|\sum_i T_i\otimes S_i\right\|_{sp} := \left\|\sum_i T_i\otimes_{sp} S_i\right\|.$$

Ορίζουμε λοιπόν το <u>spatial</u> ταυστικό γινόμενο

$$\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes_{sp}\mathcal{B}(\mathcal{K}) := \overline{\mathcal{B}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{B}(\mathcal{K})}^{\|\cdot\|_{sp}}$$

και μάλιστα η $\|\cdot\|_{sp}$ είναι μια C^*-cross-norm.

Απόδειξη. Το ότι η απεικόνιση Φ είναι καλά ορισμένη και γραμμική έπεται από την Πρόταση 3.1 και την καθολική ιδιότητα. Πράγματι, η απεικόνιση

$$\begin{aligned} \varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{K}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}) \\ (T, S) &\mapsto T \otimes_{sp} S \end{aligned}$$

είναι διγραμμική, καλά ορισμένη γιατί ορίζεται μοναδικός τελεστής $T \otimes_{sp} S$ και συνεπώς από την καθολική ιδιότητα υπάρχει μοναδική γραμμική

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}).$$

Για το 1-1, έστω $\sum_i T_i \otimes S_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K})$ τέτοιο ώστε τα S_i να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και υποθέτουμε ότι $\sum_i T_i \otimes_{sp} S_i = 0$. Έστω $h \in \mathcal{H}$ και επιλέγω $\{e_j\} \subseteq \mathcal{H}$ μια ορθοκανονική βάση του $\text{span}\{T_i(h)\} \subseteq \mathcal{H}$. Τότε, για κάθε i γράφουμε $T_i(h) = \sum_j \lambda_{i,j} e_j$, και αν $k \in \mathcal{K}$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= (\sum_i T_i \otimes_{sp} S_i)(h \otimes k) \\ &= \sum_i T_i h \otimes S_i k \\ &= \sum_i (\sum_j \lambda_{i,j} e_j) \otimes S_i k \\ &= \sum_j e_j \otimes (\sum_i \lambda_{i,j} S_i k) \end{aligned}$$

και από την γραμμική ανεξαρτησία των e_j έχουμε ότι $\sum_i \lambda_{i,j} S_i k = 0$ για κάθε $k \in \mathcal{K}$ και για κάθε j. Συνεπώς $\sum_i \lambda_{i,j} S_i = 0$ απ' όπου συμπεραίνουμε (λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των S_i) ότι $\lambda_{i,j} = 0$ για κάθε i, j και άρα τελικά $T_i(h) = 0$. Το $h \in \mathcal{H}$ ήταν τυχόν και τελικά προκύπτει ότι $T_i = 0$ για κάθε i και άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Άσκηση 3.5. *Να δειχθεί ότι η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{K}) &\to \mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes_{hs} \mathcal{K}) \\ T \otimes S &\mapsto T \otimes_{sp} S \end{aligned}$$

είναι μορφισμός $*$-αλγεβρών.

Είχαμε δεί ότι μπορούμε να μετατρέψουμε τον χώρο $M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ σε C^*-άλγεβρα, εφοδιάζοντας τον με νόρμα τελεστή μέσα από τον $*$-ισομορφισμό

$$M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) \cong \mathcal{B}(\mathcal{H}^n),$$

όπου απεικονίζουμε κάθε πίνακα με στοιχεία τελεστές στον $\mathcal{H}$ σαν τελεστές στον χώρο $\mathcal{H}^n$.

Άσκηση 3.6. *Δείξτε ότι η απεικόνιση*

$$\begin{aligned} \Psi : M_n(\mathcal{B}(\mathcal{H})) &\to M_n \otimes_{sp} \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ [T_{i,j}] &\mapsto \sum_{i,j} E_{i,j} \otimes T_{i,j}. \end{aligned}$$

είναι ένας $*$-ισομορφισμός μεταξύ C^*-αλγεβρών, και κατά συνέπεια είναι και ισομετρικός.