Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/

Α. Κατάβολος

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-22

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Περιγραφή

Στόχος Εφαρμογές των *C*-αλγεβρών*, των *συστημάτων τελεστών* (operator systems), των *χώρων τελεστών* (operator spaces), των *πλήρως θετικών* (completely positive) και *πλήρως φραγμένων* (completely bounded) απεικονίσεων ιδιαίτερα στην κβαντική θεωρία πληροφορίας (quantum information theory).

Περιεχόμενα Επισκόπηση: Χώροι Hilbert. Οικογένειες γραμμικών τελεστών σε χώρους Hilbert. Συμπαγείς τελεστές, τελεστές ίχνους (trace class) και Hilbert-Schmidt, θεωρήματα δυισμού.

Εισαγωγή στις C*-άλγεβρες και άλγεβρες Von Neumann. Θεωρία GNS, θεώρημα διαστολής Stinespring, θεώρημα επέκτασης Arveson.

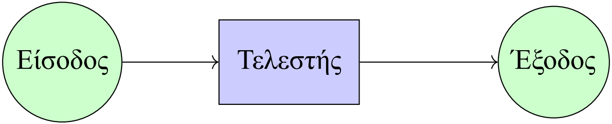
Εξειδίκευση σε χώρους πεπερασμένης διάστασης, εφαρμογές στην κβαντική θεωρία πληροφορίας.

Δείτε και τη βιβλιογραφία στο biblio21.pdf

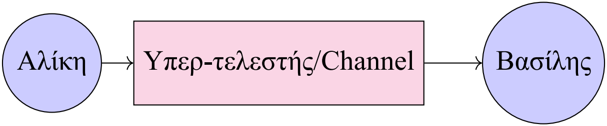
Γουατ ιζ αν Οπερέιτωρ?

Δύο εργαστήρια: Εργαστήριο Αλίκης, Εργαστήριο Βασίλη.

[Εργαστήριο Αλίκης]



Μετάδοση Πληροφοριών



Τελεστές

[Χώρος Τελεστών Αλίκης]

[Απεικόνιση μεταξύ χώρων τελεστών Αλίκης → Βασίλη]

Κβαντικά κανάλια

Ένα κβαντικό κανάλι είναι (προσωρινά...) μια απεκόνιση

$$\Phi : M_n(\mathbb{C}) \to M_k(\mathbb{C})$$

της μορφής $X \mapsto A^* X A$ ή

$$X \mapsto \sum_{i=1}^{r} A_i^* X A_i \quad (A_i : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n,\ A_i \in M_{n,k}(\mathbb{C}))$$

που διατηρεί το ίχνος Tr ($\iff \sum A_i A_i^* = Id$).

«Δυικά» έχουμε την κλάση των UCP απεικονίσεων
$\Psi : M_k(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ (πλήρως θετικές (CP) και μοναδιαίες (U)).

Για τη μελέτη τους χρησιμοποιούμε τη θεωρία των
Χώρων Τελεστών (Operator Space theory).

Χώροι Τελεστών (Operator Spaces)

Ένας χώρος τελεστών $\mathcal{X}$ είναι ένας υπόχωρος του χώρου $\mathcal{B}(H)$ των γραμμικών και φραγμένων τελεστών σε κάποιον (μιγαδικό) χώρο Hilbert H
(συχνά πεπερασμένης διάστασης, οπότε $H \simeq \ell^2[n] := (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$).

Ο $\mathcal{X}$ κληρονομεί από τον $\mathcal{B}(H)$ τη νόρμα $\|\cdot\|$:
$\|a\| := \sup\{\|a\xi\|_H : \|\xi\|_H \leq 1\}$.

Κάθε $n \times n$ πίνακας τελεστών στον H είναι επίσης τελεστής (στον H^n).
(Αν $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ τότε δρα στον H^n με πολλ/σμό πινάκων:
$[a_{ij}][\xi_j] = [\sum_k a_{ik}\xi_k]$.)

Συνεπώς κάθε $M_n(\mathcal{X})$ κληρονομεί τη νόρμα $\|\cdot\|_n$ του $\mathcal{B}(H^n)$.
Δηλαδή, εκτός απ' τον $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$, έχουμε και την οικογένεια
$\{(M_n(\mathcal{X}), \|\cdot\|_n), n \in \mathbb{N}\}$.

Πλήρως φραγμένες απεικονίσεις

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών επάγει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μια απεικόνιση
$\Phi_n : M_n(\mathcal{X}) \to M_n(\mathcal{Y}) : [x_{ij}] \to [\Phi(x_{ij})]$.

Η Φ λέγεται πλήρως φραγμένη (completely bounded) αν
$\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi_n\| < \infty$.

Σημ: $\|\Phi_n\| = \sup\{\left\|[\Phi(x_{ij})]\right\|_n : x_{ij} \in \mathcal{X}, \left\|[x_{ij}]\right\|_n \leq 1\}$.

Θετικές και πλήρως θετικές απεικονίσεις

Υπενθύμιση: Ένας τελεστής $a \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται θετικός ή θετικά ημιορισμένος αν $a = a^*$ και $\langle \xi, a\xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.
Οι κβαντικές καταστάσεις αντιστοιχούν (τουλάχιστον όταν $\dim H < \infty$) σε θετικούς τελεστές με ίχνος =1.

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ μεταξύ χώρων τελεστών $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{B}(K)$ λέγεται θετική (positive) αν στέλνει θετικούς $a \in \mathcal{X}$ σε θετικούς $\Phi(a) \in \mathcal{Y}$.

Η Φ λέγεται πλήρως θετική (completely positive) αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\Phi_n : M_n(\mathcal{X}) \to M_n(\mathcal{Y})$ είναι θετική,
δηλαδή για κάθε $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{X})$ που ορίζει θετικό τελεστή στον χώρο H, ο $[\Phi(a_{ij})] \in M_n(\mathcal{Y})$ ορίζει θετικό τελεστή στον χώρο K.

Χώροι Hilbert

Sesquilinear μορφές

Έστω H_1 και H_2 δύο μιγαδικοί γραμμικοί χώροι. [1]

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \to \mathbb{C}$ λέγεται sesquilinear μορφή αν έχει τις ιδιότητες
(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \to \phi(x, y) : H_1 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \to \overline{\phi(x, y)} : H_2 \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική.
Όταν $H_1 = H_2 = H$:
η ϕ λέγεται Ερμιτιανή ή συμμετρική αν $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)}$ $\forall x, y \in H$
και θετικά ημιορισμένη ή θετική ή ημιεσωτερικό γινόμενο αν (επιπλέον) $\phi(x, x) \geq 0$ $\forall x \in H$.
Η ϕ λέγεται εσωτερικό γινόμενο αν επιπλέον $\phi(x, x) > 0$ $\forall x \neq 0$.

Παρατήρηση Θετικά ημιορισμένη $\Rightarrow$ ερμιτιανή σε μιγαδικούς χώρους.
Αποδ. Έπεται από την ταυτότητα πολικότητας:

---

[1] Οι γραμμικοί χώροι θα είναι πάντα μιγαδικοί, εκτός αν ρητά αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Sesquilinear μορφές

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x,x)$ η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή,

$$\varphi(x,y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν ϕ θετικά ημιορισμένη, για κάθε $x,y \in H$ ισχύει

$$|\phi(x,y)|^2 \leq \phi(x,x)\phi(y,y).$$

Παραδείγματα - Ασκήσεις (α) $E = M_n(\mathbb{C})$: Έστω $a \in M_n(\mathbb{C})$. Θέτω $\phi_a(x,y) = \mathrm{Tr}(axy^*)$, $x,y \in E$.
(β) $E = C_c(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής με συμπαγή φορέα$\}$: Έστω $f_0 \in C(\mathbb{R})$. Θέτω $\phi_0(h,k) = \int f_0(t)h(t)\overline{k(t)}dt$, $h,k \in E$.

Ειδικότερα,

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$,
(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2} .$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E.

- $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ και
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \to x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \to 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.
Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον $C([a,b])$ εκφράζει την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_\infty \to 0 \iff f_n \to f \text{ ομοιόμορφα στο } [a,b].$$

[Ενώ η σημειακή σύγκλιση δεν περιγράφεται εν γένει με νόρμα.]

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Επομένως κάθε $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x,y) := \|x-y\| = \langle x-y, x-y \rangle^{1/2},\ x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E,d) \times (E,d) \to (E,d) : (x,y) \to x+y$$
$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E,d) \to (E,d) : (\lambda, x) \to \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E,d) \times (E,d) \to (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x,y) \to \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Χώροι Hilbert

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται χώρος Hilbert αν είναι πλήρης ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x(k)\overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert. Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά δεν είναι χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2, με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του. Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά όχι Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ δεν είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0,\ \text{τότε } \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Καθετότητα

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται κάθετα (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle = 0$.
Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται ορθοκανονική (orthonormal) αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορισμός

Μια ορθοκανονική οικογένεια $\mathcal{E} := \{e_i : i \in I\}$ σε έναν χώρο Hilbert H λέγεται ορθοκανονική βάση του H αν είναι μεγιστική Ο.Κ. οικογένεια, δηλ. αν κάθε Ο.Κ. οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq H$ με $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ ικανοποιεί $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

(Ισοδύναμα, αν το μόνο $x \in H$ που είναι κάθετο σε κάθε e_i είναι το 0.)
Κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονικές βάσεις (πληρότητα !).

Bessel κ.λπ.

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

Αν $\{e_i : i = 1, \dots, n\} \subseteq E$ *είναι (πεπερασμένη) ορθοκανονική οικογένεια και* $x \in E$ *(*E *χώρος με εσωτερικό γινόμενο) τότε:*

(i) $\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in \operatorname{span}\{e_i : i = 1, \dots, n\}$.

(Η Cauchy-Schwarz είναι πόρισμα της Bessel.)

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

Αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ *είναι ορθοκανονική οικογένεια και* $x \in E$*, τότε*

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορισμός: $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 := \sup\{\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 : J \subset I \text{ πεπ.}\}$.

Ορθοκανονικές Βάσεις

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο Hilbert* H. *Τότε, για κάθε* $x \in H$,

(i) $x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ *(σύγκλιση ως προς τη νόρμα του* H*).*

(ii) $\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$ *(Ισότητα Parseval).*

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο Hilbert* H, *για κάθε* $x, y \in H$ *έχουμε*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ *είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο Hilbert* H, *η απεικόνιση* $x \to (\langle x, e_n \rangle)_n$ *είναι γραμμική ισομετρία από τον* $(H, \|\cdot\|)$ *στον* $\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$, *και είναι επί (πληρότητα του* H*).*

Υπόχωρος, κάθετος υπόχωρος, χώρος πηλίκο

Έστω H χώρος Hilbert.

• Ένας γραμμικός υπόχωρος $M \subseteq H$ είναι χώρος Hilbert ως προς το εσωτ. γινόμενο του H ανν είναι κλειστός, δηλ. $\overline{M} = M$.

• Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H, ορίζω

$$A^\perp := \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}.$$

Ο $A^\perp$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H.

• Αν $M \subseteq H$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος, κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά $x = x_M + x_\perp$, όπου $x_M \in M$ και $x_\perp \in M^\perp$. Δηλαδή $H = M + M^\perp$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$.

• Αν $M \subseteq H$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος, στον χώρο πηλίκο

$$H/M := \{[x]_M : x \in H\} \text{ όπου } [x]_M := x + M := \{x + y : y \in M\} \subseteq H$$

θέτουμε $\|[x]_M\|_{H/M} := \inf\{\|x-y\|_H : y \in M\} = \operatorname{dist}(x, M)$.
Η $\|\cdot\|_{H/M}$ είναι πλήρης νόρμα και ο H/M είναι χώρος Hilbert (δες αργότερα).

Πηλίκο μέσω ημιεσωτερικού γινόμενου

Έστω (E, ϕ) γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με μια θετικά ημιορισμένη μορφή (ένα ημιεσωτερικό γινόμενο)

Τότε

• $\{x \in E : \phi(x,x) = 0\} = \{x \in E : \phi(x,y) = 0 \ \forall y \in E\} := N$

Άρα ο N είναι γραμμικός υπόχωρος του E.

• Στο πηλίκο E/N ορίζεται καλά εσωτερικό γινόμενο από τον τύπο:

$$\langle [x]_N, [y]_N \rangle := \phi(x,y), \quad x, y \in E\,.$$

Επομένως η πλήρωση H_ϕ του E/N ως προς την επαγόμενη νόρμα $\|[x]_N\| = \sqrt{\phi(x,x)}$ είναι χώρος Hilbert.

Παράδειγμα Αν $E = C([0,1])$ και $\phi(f,g) = \int_0^{1/2} f(t)\bar{g}(t)dt$, αποδεικνύεται ότι $H_\phi \simeq L^2([\frac{1}{2}, 1])$.

Ευθύ άθροισμα

Αν H_1, H_2, H είναι χώροι Hilbert, θέτουμε

$$H_1 \oplus H_2 = \{(x,y) : x \in H_1, y \in H_2\}, \quad \|(x,y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$$

είναι χώρος Hilbert.

$$H^{(\infty)} := \{x := (x(n)) : x_n \in H : \sum_n \|x(n)\|_H^2 < \infty\},$$

$$\|x\| := \sqrt{\sum_n \|x(n)\|_H^2}$$

είναι χώρος Hilbert.
Παρατήρηση Αν $M \subseteq H$ είναι κλειστός υπόχωρος του H, είδαμε ότι $H = M + M^\perp$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $M \oplus M^\perp$ μέσω της απεικόνισης

$$M \oplus M^\perp \to H : (x,y) \mapsto x + y.$$

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

(Περισσότερα και αποδείξεις στο tanginom3.pdf.)

Έστω E, F γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$.

Ορισμός

Τανυστικό γινόμενο των E και F ονομάζεται ένα ζεύγος (M, ϕ), όπου M ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $\phi : E \times F \to M$ μια διγραμμική απεικόνιση που ικανοποιούν τα εξής:

1. $M = \mathrm{span}\{\phi(x, y) : x \in E, y \in F\}$
2. Έστω $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\phi(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεώρημα (Ύπαρξη)

Αν E και F δύο γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$, τότε ύπαρχει (τουλάχιστον) ένα τανυστικό γινόμενο των E και F.

Θεώρημα (Μοναδικότητα)

Αν (M_1, ϕ_1) *και* (M_2, ϕ_2) *δύο τανυστικά γινόμενα των γραμμικών χώρων* E *και* F *τότε, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός* $\pi : M_1 \to M_2$ *ώστε* $\pi \circ \phi_1 = \phi_2$.

Έπεται από την

Θεώρημα (Καθολική Ιδιότητα)

Έστω E, F *δύο* $\mathbb{K}$*-γραμμικοί χώροι και* (M, ϕ) *ένα τανυστικό τους γινόμενο. Για κάθε* $\mathbb{K}$*-γραμμικό χώρο* G *και κάθε διγραμμική απεικόνιση* $b : E \times F \to G$, *υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση* $B : M \to G$ *τέτοια ώστε* $B(\phi(x, y)) = b(x, y)$ *για κάθε* $(x, y) \in E \times F$.

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

Στο εξής συμβολίζουμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο M δύο γραμμικών χώρων E και F με $E \otimes F$ και τη διγραμμική απεικόνιση $\phi : E \times F \to E \otimes F$ με

$$(x, y) \mapsto x \otimes y.$$

Δηλαδή, το τανυστικό γινόμενο των χώρων E και F, είναι ένας γραμμικός χώρος $E \otimes F$ της μορφής

$$E \otimes F = \mathrm{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

και κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ σε αυτόν τον χώρο έχει μια αναπαράσταση (όχι μοναδική) της μορφής

$$u = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i$$

όπου $x_i \in E$ και $y_i \in F$ για κάθε $i = 1, \ldots, k$. Κάθε στοιχείο της μορφής $x \otimes y$ ονομάζεται *στοιχειώδης τανυστής* (elementary tensor) ή *απλός τανυστής* (simple tensor).

Πρόταση

Κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ *μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα* $u = \sum_i e_i \otimes f_i$ *ώστε τα* $\{f_i\} \subseteq F$ *να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε τα* $\{e_i\} \subseteq E$ *καθορίζονται μοναδικά απο τα* f_i.

Τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert [Α. Χατζηνικολάου]

Ορισμός

Έστω H, K χώροι Hilbert. Στον χώρο $H \otimes K$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \right\rangle_{hs} := \sum_{i,j} \left\langle x_i, y_j \right\rangle_H \left\langle z_i, w_j \right\rangle_K .$$

Δηλαδή, αν $h_i \otimes k_i \in H \otimes K, i = 1, 2$ έχουμε

$$\langle h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 \rangle_{hs} = \langle h_1, h_2 \rangle_H \langle k_1, k_2 \rangle_K .$$

Πρόταση

Η απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs} : (H \otimes K) \times (H \otimes K) \to \mathbb{C}$ *είναι ένα καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο* $H \otimes K$. [2]

Ορισμός

Ονομάζουμε $H \otimes_{hs} K$ την πλήρωση του χώρου $(H \otimes K, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|\cdot\|_{hs} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}^{\frac{1}{2}}$ η επαγόμενη νόρμα.

[2] Όταν οι H και K είναι απειροδιάστατοι χώροι Hilbert, το $H \otimes K$ δεν είναι πλήρης χώρος.

Το κλειδί

Θεώρημα (Ύπαρξη κάθετου διανύσματος)

Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός υπόχωρος *του H. Αν $E \neq H$, τότε υπάρχει $z \in H \setminus \{0\}$, $z \perp E$.*

Πιο συγκεκριμένα

Θεώρημα (Πλησιέστερο διάνυσμα)

Έστω H χώρος Hilbert, E κλειστός υπόχωρος *του H. Αν $x \in H \setminus E$, τότε υπάρχει μοναδικό $y \in E$ πλησιέστερο προς το x, δηλαδή τέτοιο ώστε $\|x - y\| = d(x, E) := \inf\{\|x - z\| : z \in E\}$. Το μοναδικό αυτό στοιχείο y του E ονομάζουμε (ορθή) προβολή του x στον E, και το συμβολίζουμε $P_E(x)$ ή $P(E)x$.*
Το $x - P_E x$ είναι κάθετο στον E.

(Για μια απόδειξη δείτε στο nearest2.pdf.)

Πόρισμα

Αν H είναι χώρος Hilbert, ένας γραμμικός υπόχωρος $V \subseteq H$ είναι πυκνός στον H αν και μόνον αν $V^{\perp} = \{0\}$.

Ο δυϊκός ενός χώρου Hilbert

Παρατήρηση

Έστω E *χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν* $x \in E$*, ονομάζουμε* f_x *την απεικόνιση*

$$f_x : E \to \mathbb{K} \, : \, y \to \langle y, x \rangle .$$

Η f_x *είναι γραμμική και συνεχής.*

Θεώρημα (Riesz)

Έστω H *χώρος Hilbert. Για κάθε γραμμική και συνεχή* $f : H \to \mathbb{K}$ *υπάρχει μοναδικό* $x \in H$ *ώστε* $f = f_x$*, δηλαδή*

$$f(y) = \langle y, x \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; y \in H .$$

Φραγμένοι τελεστές

Γραμμικοί τελεστές

Ορισμός

Αν E, F είναι γραμμικοί χώροι, ονομάζουμε $\mathcal{L}(E, F)$ το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$. Όταν $E = F$, γράφουμε $\mathcal{L}(E)$ αντί για $\mathcal{L}(E, E)$.

Με γραμμ. πράξεις κατά σημείο, δηλ.

$$(T + \lambda S)(x) = Tx + \lambda(Sx) \quad (x \in E)$$

το σύνολο $\mathcal{L}(E, F)$ γίνεται γραμμικός χώρος.

Πίνακες και Τελεστές

• Κάθε $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ ορίζει μοναδικό πίνακα $A_T = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ από τη σχέση

$$a_{ik} = \langle Te_k, f_i \rangle$$

(όπου γράψαμε $\{e_k\}$ τη συνηθισμένη βάση του $\mathbb{K}^m$ και $\{f_i\}$ τη συνηθισμένη βάση του $\mathbb{K}^n$.

• Κάθε $A = [a_{ij}] \in M_{nm}(\mathbb{K})$ ορίζει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση $T_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ μέσω πολλαπλασιασμού πινάκων, ως εξής

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Η απεικόνιση $M_{nm}(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) : A \to T_A$ είναι 1-1, επί και γραμμική.

Σύνθεση (όταν ορίζεται) $\rightsquigarrow$ γινόμενο πινάκων.

Φραγμένοι τελεστές

Έστω $(E, \|\cdot\|_E)$ και $(F, \|\cdot\|_F)$ χώροι με νόρμα.

Παρατήρηση. Καμμιά γραμμική συνάρτηση (εκτός απ' την 0) δεν είναι φραγμένη με τη συνήθη έννοια σε όλον το χώρο.

Ορισμός

Μία *γραμμική* απεικόνιση $T : (E, \|\cdot\|_E) \to (F, \|\cdot\|_F)$ λέγεται φραγμένη ή φραγμένος τελεστής (bounded operator) αν

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_F : x \in E, \|x\|_E \le 1\} < +\infty$$
$$\left(= \sup\left\{ \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E} : x \in E, x \neq 0 \right\}.\right)$$

$\mathcal{B}(E, F)$: ο χώρος των φραγμένων τελεστών.

$$\|Tx - Tx'\|_F \overset{\text{γρ.}}{=} \|T(x - x')\|_F \overset{\text{φρ.}}{\le} \|T\| \, \|x - x'\|_E$$

Αν T γραμμική,

φραγμένη $\iff$ συνεχής $\iff$ ομοιόμορφα συνεχής.

Φραγμένοι τελεστές

Η επόμενη Πρόταση είναι βασικό εργαλείο:

Πρόταση

Έστω $(E, \|.\|_E)$ *χώρος με νόρμα,* $(F, \|.\|_F)$ *χώρος Banach,*
$D \subseteq E$ *πυκνός υπόχωρος και*

$$T : D \to F$$

γραμμική απεικόνιση.
Αν η T *είναι συνεχής, τότε (και μόνο τότε) δέχεται συνεχή επέκταση*

$$\tilde{T} : E \to F \quad \textit{δηλ.}\ \tilde{T}|_D = T\,.$$

Η επέκταση $\tilde{T}$ *είναι μοναδική (αν υπάρχει) και* $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

Ο συζυγής τελεστής

Θεώρημα

Αν H_1, H_2 είναι δύο χώροι Hilbert και $T : H_1 \to H_2$ ένας φραγμένος τελεστής, τότε υπάρχει ένας μοναδικός τελεστής $T^* : H_2 \to H_1$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle T^* x_2, x_1 \rangle_{H_1} = \langle x_2, T x_1 \rangle_{H_2} \qquad \text{για κάθε } x_1 \in H_1, x_2 \in H_2.$$

Ο $T^* : H_2 \to H_1$ ονομάζεται ο συζυγής (adjoint) του T. Είναι φραγμένος τελεστής και $\|T^*\| = \|T\|$.

Όταν $H_1 = \ell^2[m]$, $H_2 = \ell^2[n]$ και

$$a_{ik} = \langle T e_k, f_i \rangle$$

τότε ο πίνακας του $T^* : H_2 \to H_1$ είναι ο ανάστροφος συζυγής του A_T, δηλ. $A_{T^*} = [b_{ij}]$ όπου $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$.
Εδώ $\ell^2[m] := (\mathbb{K}^m, \|\cdot\|_2)$

Προειδοποίηση Ο συζυγής ενός μη φραγμένου τελεστή δεν ορίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Ο συζυγής τελεστής

Πρόταση

Η απεικόνιση $T \to T^* : \mathcal{B}(H_1, H_2) \to \mathcal{B}(H_2, H_1)$ *έχει τις εξής ιδιότητες:*
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(T + \lambda S)^* = T^* + \bar{\lambda} S^*$.
(β) $T^{**} = T$.
(γ) $\|T^*\| = \|T\|$.
(δ) Αν $H_1 \xrightarrow{S} H_2 \xrightarrow{T} H_3$ *φραγμένοι τελεστές,* $(TS)^* = S^* T^*$.
(ε) $\|T^* T\| = \|T\|^2$.

Ειδικότερα (αν $H_1 = H_2 = H$),
η $T \to T^* : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια ενέλιξη (involution) που ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C^*, δηλ. την (ε).

Κατηγορίες τελεστών

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τότε*
Ο T *είναι ισομετρία αν και μόνον αν* $T^*T = I_{H_1}$*, ισοδύναμα αν και μόνον αν* $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ *για κάθε* $x, y \in H_1$.

Ένας $U : H_1 \to H_2$ λέγεται ορθομοναδιαίος (unitary) αν είναι ισομετρία και επί.

Πρόταση

Έστω $U \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$*, όπου* H_i *μιγαδικοί χώροι Hilbert. Τα εξής είναι ισοδύναμα*

1. U *unitary*
2. U *και* U^* *ισομετρίες*
3. $U^*U = I_{H_1}$ *και* $UU^* = I_{H_2}$
4. U *αντιστρέψιμος και* $U^{-1} = U^*$

Κατηγορίες τελεστών

Παραδείγματα

Αν $\mathrm{H}_1 = \mathrm{H}_2 = H$ με $\dim H < \infty$, κάθε ισομετρία είναι βεβαίως επί. Στον ℓ^2, ο $S : e_n \to e_{n+1}$ είναι ισομετρία, όχι επί αφού $e_1 \notin S(\ell^2)$ (στο ξενοδοχείο Hilbert πάντα βρίσκουμε θέση, ακόμα κι αν σε κάθε e_n υπάρχει ένοικος).

$$
\begin{aligned}
\ell^2 &\to \ell^2 \\
S : (x(1), x(2), \dots) &\mapsto (0, x(1), x(2), \dots) \\
S^* : (x(1), x(2), \dots) &\mapsto (x(2), x(3), \dots) \\
S^*S : (x(1), x(2), \dots) &\mapsto (x(1), x(2) \dots) \\
S^*S : (x(1), x(2), \dots) &\mapsto (0, x(2), x(3), \dots)
\end{aligned}
$$

Κατηγορίες τελεστών

Ορισμός

Έστω H_1, H_2 χώροι Hilbert.
(i) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται φυσιολογικός (normal) αν $T^*T = TT^*$.
(σαν τις συναρτήσεις)
(ii) Ένας $T \in \mathcal{B}(H_1)$ λέγεται αυτοσυζυγής (self-adjoint) αν $T = T^*$.
(σαν τις πραγματικές συναρτήσεις)

Παραδείγματα:
Ο (unilateral) shift S στον $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$ δεν είναι φυσιολογικός.
Κάθε M_f είναι φυσιολογικός.
Ένας M_f είναι αυτοσυζυγής αν-ν $f(t) \in \mathbb{R}$ για κάθε t.
Ο μετασχηματισμός Fourier $F : L^2([0, 2\pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ είναι ορθομοναδιαίος.

Κατηγορίες τελεστών

Υπενθύμιση Αν H είναι χώρος Hilbert και $M \subseteq H$ κλειστός υπόχωρος, κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά $x = x_M + x_\perp$ όπου $x \in M$ και $x_\perp \perp M$. Η απεικόνιση $P_M : H \to H : x \mapsto x_M$ είναι η (ορθή) προβολή του H στον M.

Πρόταση

Ένας $P \in \mathcal{B}(H)$ είναι προβολή αν και μόνον αν $P = P^2 = P^*$. Τότε $P = P_M$ όπου $M = \{Px : x \in H\} := \mathrm{Im}P$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ μεταξύ δύο γραμμικών χώρων E, F λέγεται τάξης n ($n \in \mathbb{N}$) αν ο υπόχωρος $T(E) = \operatorname{im} T$ έχει διάσταση n. Γράφουμε $\operatorname{rank}(T) = n$. Αν οι E, F είναι χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(E, F)$ το σύνολο των φραγμένων γραμμικών απεικονίσεων $T : E \to F$ που έχουν πεπερασμένη τάξη (finite rank), δηλαδή

$$\mathcal{F}(E, F) = \{T \in \mathcal{B}(E, F) : \operatorname{rank}(T) < +\infty\}.$$

Ειδικότερα, γράφουμε $\mathcal{F}(E) = \mathcal{F}(E, E)$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Αν H, K είναι χώροι Hilbert, $v \in K$ και $u \in H$ ορίζουμε τον τελεστή

$$vu^* : H \to K$$

$$\text{από τον τύπο} \quad vu^* : x \xrightarrow{u^*} \langle x, u \rangle \xrightarrow{v} \langle x, u \rangle\, v \quad (x \in H).$$

Συνήθεις συμβολισμοί:

$$vu^* = \Theta_{u,v} = v \otimes u^* = |v\rangle\langle u|$$

Ο τελεστής vu^* είναι φραγμένος, και $\|vu^*\| = \|v\| \cdot \|u\|$.
Κάθε $T \in \mathcal{F}(H, K)$ πρώτης τάξης ($\mathrm{rank}(T) = 1$) είναι αυτής της μορφής (με u, v μη μηδενικά).

Κάθε $A \in \mathcal{F}(H, K)$ γράφεται $A = \sum_{k=1}^{n} v_k u_k^*$ όπου $\{u_k : k \in [n]\} \subseteq H$ και $\mathrm{span}\{v_k : k \in [n]\} = \mathrm{im}\, A$.
Ισχύει $A^* = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k^*$.

Τελεστές Πεπερασμένης Τάξης

Αν $v \in H$, $\|v\| = 1$ τότε ο vv^* είναι η προβολή στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{v\}$.

Γενικότερα αν $\{v_1, \dots, v_n\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια στον H, ο τελεστής $\sum_{k=1}^{n} v_k v_k^*$ είναι η προβολή στον υπόχωρο $\mathrm{span}\{v_1, \dots, v_n\}$.

Παράδειγμα Αν $v = [v_1, \dots v_m]^T \in \mathbb{C}^m$ και $u = [u_1, \dots u_n]^T \in \mathbb{C}^n$, ο τελεστής vu^* έχει πίνακα $[v_i \bar{u}_j]$.

Συμπαγείς Τελεστές $\mathcal{K}(E,F)$

Ορισμός

Έστω E, F χώροι Banach. Μια γραμμική απεικόνιση $T : E \to F$ λέγεται συμπαγής (compact) αν απεικονίζει την κλειστή μοναδιαία μπάλα $\hat{B}_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ του E σε ένα $\|\cdot\|$-σχετικά συμπαγές υποσύνολο του F (αν δηλαδή το $T(\hat{B}_E)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F). Γράφουμε $T \in \mathcal{K}(E,F)$.

Κάθε συμπαγής τελεστής είναι φραγμένος.
Οι φραγμένοι τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι συμπαγείς.

Θεώρημα

Έστω H, K χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H,K)$.
Ο T είναι συμπαγής αν και μόνον αν υπάρχει μια ακολουθία $\{F_n\}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης $F_n : H \to K$ ώστε $\|T - F_n\| \to 0$.

Παρατήρηση Δεν ισχύει σε όλους τους χώρους Banach (Per Enflo, Acta Math., **130** (1973).

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο $\mathcal{F}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος.

Λήμμα

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι γραμμικός χώρος: Αν $T,S \in \mathcal{K}(E,F)$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, τότε $T+\lambda S \in \mathcal{K}(E,F)$.

Παρατήρηση: Γινόμενο φραγμένου τελεστή A με πεπερασμένης τάξης $X \in \mathcal{F}(E,F)$ ή πεπερ. τάξης X με φραγμένο B είναι πεπερασμένης τάξης:

$$M \xrightarrow{B} E \xrightarrow{X} F \xrightarrow{A} N$$

Λήμμα

Αν M,E,F,N είναι χώροι Banach,

$$\begin{aligned} & B \in \mathcal{B}(M,E),\ X \in \mathcal{K}(E,F) \ \textit{και} \ A \in \mathcal{B}(F,N) \\ \Longrightarrow \quad & XB \in \mathcal{K}(M,F) \quad \textit{και} \quad AX \in \mathcal{K}(E,N) \end{aligned}$$

Συμπαγείς Τελεστές

Παρατήρηση: Ο υπόχωρος $\mathcal{F}(E,F)$ δεν είναι κλειστός στον $\mathcal{B}(E,F)$ (σε απειροδιάστατους χώρους).

Πρόταση

Αν E,F είναι χώροι Banach, ο $\mathcal{K}(E,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach $\mathcal{B}(E,F)$, άρα χώρος Banach.

Παρατήρηση: Άρα, αν $\|A_n - A\| \to 0$ και κάθε A_n είναι συμπαγής, τότε ο A είναι συμπαγής. Όμως: Το κατά σημείο όριο ακολουθίας τελεστών πεπερασμένης τάξης δεν είναι πάντα συμπαγής.

Παρατήρηση: Ειδικότερα το $\mathcal{K}(E)$ είναι (αμφίπλευρο) κλειστό ιδεώδες της άλγεβρας Banach $\mathcal{B}(E)$.

Πρόταση

Αν H,K είναι χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{K}(H,K)$, τότε $T^* \in \mathcal{K}(K,H)$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός

(Αποδείξεις στο funcalc2122.pdf.)

Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Παραδείγματα

(α) Στον χώρο $\ell^2 = \ell^2(\mathbb{Z}_+)$ θεωρούμε τον τελεστή S που ικανοποιεί $S : e_n \mapsto e_{n+1}\,(n \in \mathbb{Z}_+)$. Ο S δεν έχει ιδιοτιμές.
Όμως ο S^* έχει υπεραριθμήσιμο πλήθος ιδιοτιμών: κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| < 1\}$ είναι ιδιοτιμή του. Τα (μοναδιαία) ιδιοδιανύσματά του $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$ δεν είναι κάθετα. Η κλειστή γραμμική θήκη τους είναι όλος ο χώρος.

(β) Στον χώρο $\ell^2(\mathbb{Z})$ θεωρούμε τον τελεστή U που ικανοποιεί $U : e_n \mapsto e_{n+1}\,(n \in \mathbb{Z})$. Ο U δεν έχει ιδιοτιμές. Ούτε ο U^* έχει ιδιοτιμές.

(γ) Στον χώρο $L^2([0,1])$ θεωρούμε τον τελεστή M με $(Mf)(t) = tf(t)\,(f \in C([0,1]))$. Ο M δεν έχει ιδιοτιμές. (Ασκ.)
Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.

Το Φάσμα

Ορισμός

Το φάσμα ενός φραγμένου τελεστή A σ' έναν χώρο Banach είναι το σύνολο

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ο } A - \lambda I \text{ δεν έχει (φραγμ.) αντίστροφο } \}.$$

Πρόταση

Το φάσμα $\sigma(A)$ είναι συμπαγές μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{C}$:

$$\emptyset \subsetneq \sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Μάλιστα,

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_m \|A^n\|^{1/n}$$

(τύπος φασματικής ακτίνας, spectral radius).

Πρόταση

- *Αν* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^*$, *τότε* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.
- *Αν* U *unitary, τότε* $\sigma(U) \subseteq \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$.
- *Αν* $\mathrm{A}A^* = \mathrm{A}^*A$, *τότε* $\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\} = \|A\|$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $p(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} c_k \lambda^k$ είναι πολυώνυμο, γράφουμε

$$p(\mathrm{A}) = c_0 \mathrm{I} + \sum_{k=1}^{n} c_k \mathrm{A}^k \,.$$

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θεώρημα

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ και $A = A^*$ και p είναι πολυώνυμο, τότε

$$\|p(A)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(A)\} := \|p\|_{\sigma(A)} \,.$$

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Για κάθε συνεχή $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικός τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ τέτοιος ώστε $f(A) = \lim p_n(A)$ όπου (p_n) πολυώνυμα με $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$.

Ιδιότητες

- $\|f(A)\| = \|f\|_{\sigma(A)}$
- $\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$
- $(f+g)(A) = f(A) + g(A)$,
- $(fg)(A) = f(A).g(A)$,
- $(f(A))^* = \bar{f}(A)$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

Θεώρημα (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))

*Αν $A = A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(A)), \|\cdot\|_{\sigma(A)}) \to (\mathcal{B}(H), \|\cdot\|)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στον ταυτοτικό τελεστή και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στον τελεστή A. Επίσης ισχύει $\Phi_c(p) = p(A)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Ορισμός

Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις (continuous functional calculus) είναι η απεικόνιση $\Phi_c : C(\sigma(A)) \to \mathcal{B}(H)$. Συνήθως γράφουμε $f(A)$ αντί για $\Phi_c(f)$.

Δηλαδή αν η f είναι συνεχής στο $\sigma(A)$, ο τελεστής $f(A) \in \mathcal{B}(H)$ ορίζεται μοναδικά από το όριο $f(A) = \lim p_n(A)$ όπου (p_n) πολυώνυμα με $\|p_n - f\|_{\sigma(A)} \to 0$.

Ο Συναρτησιακός Λογισμός για αυτοσυζυγείς τελεστές

Παρατήρηση

Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A. Για παράδειγμα, κάθε ιδιόχωρος του A είναι αναλλοίωτος (μάλιστα, ανάγεται) από τον $f(A)$.

Πρόταση (Φασματικής Απεικόνισης)

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και $f \in C(\sigma(A))$, τότε

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Πόρισμα

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής.

- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι πάντα φυσιολογικός.*
- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$.*

Θετικοί τελεστές και πολική αναπαράσταση

Θετικότητα

Ορισμός

Ένας τελεστής $P \in \mathcal{B}(H)$ λέγεται *θετικός (γράφουμε $P \in \mathcal{B}(H)_+$ ή $P \geq 0$)* αν (είναι αυτοσυζυγής και)

$$\langle Px, x \rangle \geq 0 \quad \text{για κάθε } x \in H.$$

Παρατήρηση

Σε μιγαδικούς χώρους Hilbert, αρκεί η συνθήκη $\langle Px, x \rangle \geq 0$ για κάθε $x \in H$, γιατί τότε αυτομάτως έχουμε $\langle Px, y \rangle = \langle P^* x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H$, δηλαδή $P = P^*$.

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{B}(H)$, τα εξής είναι ισοδύναμα

1. $A \geq 0$,
2. $A = A^*$ *και* $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}^+$,
3. *υπάρχει* $X \in \mathcal{B}(H)$ *ώστε* $A = X^* X$.

Τετραγωνική ρίζα

Πόρισμα

Κάθε θετικός τελεστής έχει θετική τετραγωνική ρίζα: Αν $A \in \mathcal{B}(H)_+$ *υπάρχει* $B \in \mathcal{B}(H)_+$ *ώστε* $B^2 = A$.

Παρατήρηση

Αποδεικνύεται ότι η θετική τετραγωνική ρίζα ενός θετικού τελεστή A *είναι μοναδική. Γι αυτό γράφουμε* $A^{1/2}$ *για τον τελεστή* $f(A)$ *που ορίσαμε από την* $f(\lambda) = \sqrt{\lambda}$.

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H, K)$. Ορίζουμε

$$|T| = (T^*T)^{1/2} \in \mathcal{B}(H).$$

Σημειώστε ότι εν γένει έχουμε $|T| \neq |T^*|$ (παράδειγμα ο $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$).

$\mathcal{B}(H) = \operatorname{span} \mathcal{B}_+(H)$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f_+, f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου

$$f_+(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad f_-(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases}.$$

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Εφαρμόζοντας τον συναρτησιακό λογισμό ορίζονται οι τελεστές $A_+ = f_+(A) \in \mathcal{B}(H)$ και $A_- = f_-(A) \in \mathcal{B}(H)$. Από τις ιδιότητες του συναρτησιακού λογισμού έχουμε

$$\begin{aligned} & A_+ \geq 0, \quad A_- \geq 0, \\ & A = A_+ - A_-, \\ & |A| = A_+ - A_-, \\ & A_+ . A_- = 0. \end{aligned}$$

Κάθε $T \in \mathcal{B}(H)$ γράφεται $T = A + iB$ όπου $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ και $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$ αυτσυζυγείς. Άρα
$T = A + iB = (A_+ - A_-) + i(B_+ - B_-)$.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Ορισμός

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. Η μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα $(T^*T)^{1/2}$ του θετικού τελεστή $T^*T \in \mathcal{B}(H_1)$ συμβολίζεται $|T|$:

$$|T| := (T^*T)^{1/2}.$$

Ορισμός

Ένας τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ λέγεται μερική ισομετρία (partial isometry) αν ο περιορισμός της V στον υπόχωρο $M = (\ker V)^\perp$ είναι ισομετρία. Ο υπόχωρος M λέγεται αρχικός χώρος και ο υπόχωρος $V(M)$ (ο οποίος είναι κλειστός - γιατί;) λέγεται τελικός χώρος της V.

Πολική αναπαράσταση τελεστή

Κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός z έχει μοναδική *πολική αναπαράσταση* $z = u|z|$, όπου $|z| > 0$ και $|u| = 1$.

Πρόταση (πολική αναπαράσταση: polar decomposition)

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μια μερική ισομετρία V με αρχικό χώρο $\overline{|T|(H_1)} \subseteq H_1$ και τελικό χώρο $\overline{T(H_1)} \subseteq H_2$ ώστε

$$T = V|T|.$$

$$\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & H_2 \\
& H_1 \arrow[ur, "V"'] &
\end{tikzcd}$$

Ιδέα της απόδειξης Παρατηρείς ότι $\|Tx\| = \||T|x\|$ για κάθε $x \in H_1$, οπότε μπορείς να ορίσεις $V_0 : |T|x \to Tx$ και να επεκτείνεις...

Πολική αναπαράσταση

$$
\begin{tikzcd}
H_1 \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "|T|"'] & & \mathrm{Im}(T) \arrow[r] & H_2 \\
& \mathrm{Im}(|T|) \arrow[ur, "V_0"'] \arrow[d] & & \\
& H_1 \arrow[uurr, "V"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Πρόταση

Έστω $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ αυθαίρετος τελεστής. Υπάρχει μοναδικός unitary τελεστής $V_1 : \overline{\mathrm{Im}(|T|)} \to \overline{\mathrm{Im}(T)}$ ώστε $T = V_1|T|$.

Επιπλέον, αν $\dim(\mathrm{Im}(|T|))^{\perp}) = \dim(\mathrm{Im}(T)^{\perp})$ τότε μπορούμε να επεκτείνουμε τον V_1 σε unitary $U : H_1 \to H_2$ ώστε $T = U|T|$. Όταν $H_1 = H_2 = \ell^2[n]$ αυτό ισχύει πάντα. Επομένως, κάθε $n \times n$ πίνακας T παραγοντοποιείται σε $T = U|T|$ όπου U unitary.

Τελεστές ίχνους και κλάσεις Schatten

(Αποδείξεις στο schatt.pdf.)

Τελεστές ίχνους και κλάσεις Schatten

Δυισμός Ο γραμμ. χώρος $M_{k,n}$ εφοδιάζεται με ένα εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(B^*A)$$

(εδώ αν $X : \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^k \xrightarrow{B^*} \mathbb{C}^n$, ορίζω $\mathrm{Tr}(X) = \sum_{i=1}^{k} x_{ii}$ όπου $x_{ii} = \sum_{j=1}^{n} \bar{b}_{ji}a_{ij}$).

Πίνακες και Δυισμός

Κάθε $A \in M_{n,k}$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : \mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]) \simeq M_{k,n} \to \mathbb{C} : B \to \mathrm{Tr}(AB)\,.$$

Η απεικόνιση $M_{n,k} \to (\mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]))^* : A \to f_A$ είναι 1-1 και επί (επειδή $\dim(\mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]))^* = \dim M_{k,n} < \infty$, και κάθε γραμμ. μορφή είναι συνεχής) και είναι *γραμμική*. Έχουμε

$$\|f_A\| = \sup\{|\mathrm{Tr}(AB)| : B \in M_{k,n}, \|B\|_{op} \le 1\}.$$

Κλάσεις Schatten πεπερασμένης διάστασης

Στα επόμενα, θεωρούμε δύο χώρους Hilbert E και F με $\dim E = n$ και $\dim F = k$ *πεπερασμένες.* Έχουμε τότε

$$\mathcal{B}(E,F) \simeq M_{k,n} \text{ μέσω της } A \to [a_{ij}], \qquad a_{ij} = \left\langle Ae_j, f_i \right\rangle .$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "A"] \arrow[d, tail, two heads, "\simeq"] & F \arrow[d, tail, two heads, "\simeq"] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "{[a_{ij}]}"] & \mathbb{C}^k \end{tikzcd}$$

Αν $A \in \mathcal{B}(E,F)$, ο $A^*A \in \mathcal{B}(E) \simeq M_n$ είναι θετικός, άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_j\}$ του E και $s_j := s_j(A) \geq 0$ ώστε
$A^*Ae_j = s_j^2 e_j$.
Ορίζω $|A| = (A^*A)^{1/2}$ ως εξής: $|A|e_j := s_j(A)e_j$, $j = 1, \ldots n$.
Θέτω $f_j = \frac{1}{s_j} Ae_j$ όταν $s_j \neq 0$. Ορίζω $V : E \to F$ με $Ve_j = f_j$ όταν $s_j \neq 0$ και $Ve_j = 0$ όταν $s_j = 0$. Έχουμε

$$A = V|A| \qquad (\textit{πολική αναπαράσταση}).$$

Κλάσεις Schatten πεπερασμένης διάστασης

Ορισμός

Για $1 \leq p < \infty$, η *p-νόρμα του Schatten* ορίζεται για $A \in \mathcal{B}(E,F)$ από

$$\|A\|_p^p := \mathrm{Tr}(|A|^p) = \sum |s_j(A)|^p = \left\|(s_j(A))\right\|_{\ell^p}^p$$

$$\|A\|_\infty := \sup\{\|Ax\|, x \in \mathrm{ball}(E)\}.$$

Σχόλιο Δεν είναι προφανές ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα. Θα το δείξουμε για $p = 1$.

Άσκηση. $\|A\|_\infty = \sup_p \|A\|_p$.

Κλάσεις Schatten πεπερασμένης διάστασης

Κάθε $A \in \mathcal{B}(F,E)$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : \mathcal{B}(E,F) \to \mathbb{C} : B \to \mathrm{Tr}(AB)\,.$$

Η απεικόνιση $\mathcal{B}(F,E) \to (\mathcal{B}(E,F))^* : A \to f_A$ είναι 1-1 (διότι $f_A(A^*) = \mathrm{Tr}(AA^*) \neq 0$ όταν $A \neq 0$) και επί (επειδή $\dim \mathcal{B}(E,F) = kn < \infty$, άρα κάθε γραμμ. μορφή είναι συνεχής) και είναι *γραμμική*. Έχουμε

$$\|f_A\| = \sup\{|\,\mathrm{Tr}(AB)| : B \in \mathcal{B}(E,F), \|B\|_\infty \leq 1\}\,.$$

Πρόταση

$$\|f_A\| = \|A\|_1 = \mathrm{Tr}(|A|).$$

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα

Αν $A, B \in M_m$ *και* $A \geq 0$,

$$A \geq 0 \;\Rightarrow |\,\mathrm{Tr}(AB)| \leq \|B\|\,\mathrm{Tr}(A)\,.$$

Ο Δυικός του χώρου Schatten πεπερασμένης διάστασης

Υπενθύμιση: $\dim E < \infty, \dim F < \infty$

Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος Schatten είναι ο χώρος Banach

$$\mathcal{C}_p(E,F) = (\mathcal{B}(E,F), \|\cdot\|_p) \simeq (M_{k,n}, \|\cdot\|_p).$$

Κάθε $A \in \mathcal{B}(F,E)$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : \mathcal{C}_p(E,F) \to \mathbb{C} : B \to \mathrm{Tr}(AB)\,.$$

Πρόταση

Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *η απεικόνιση*

$$\mathcal{C}_q(F,E) \to (\mathcal{C}_p(E,F))^* : A \to f_A$$

είναι ισομετρία: $\quad \|f_A\| = \|A\|_q$ *(και επί).*

Σε απειροδιάστατους χώρους

Στα επόμενα, σταθεροποιούμε δυο χώρους Hilbert, διαχωρίσιμους για ευκολία. Θυμίζουμε ότι κάθε συμπαγής τελεστής $A : H \to K$ γράφεται

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) f_k e_k^*$$

όπου $s_k(A)$ είναι ιδιοτιμή του τελεστή $|A| = (A^* A)^{1/2}$ με ιδιοδιάνυσμα e_k, και $s_k(A) f_k = Ae_k$. Γράφουμε την ακολουθία $(s_k(A))$ σε μη αύξουσα διάταξη, [3] δηλ. $s_k(A) \geq s_{k+1}(A)$ (οπότε $s_1(A) = \|A\|$). Παρατηρούμε ότι

$$s_k(A) = \langle Ae_k, f_k \rangle = \langle |A| e_k, e_k \rangle \,.$$

Στην περίπτωση που ο A έχει πεπερασμένη τάξη N (οπότε $s_k(A) = 0$ για $k > N$) ορίζεται το ίχνος του $|A|$ και έχουμε

$$\mathrm{Tr}(|A|) = \sum_{k=1}^{N} \langle |A| e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{N} s_k(A) \,.$$

[3] Είναι γνωστό ότι υπάρχει ιδιοτιμή του $|A|$ που ισούται με τη νόρμα του.

Τελεστές Ίχνους (Trace class operators)

Ορισμός

Αν $A : H \to K$ είναι συμπαγής τελεστής ορίζουμε

$$\|A\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) \in [0, \infty] .$$

Ένας τελεστής $A : H \to K$ λέγεται τελεστής ίχνους (trace class operator) (γράφουμε $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$) αν *είναι συμπαγής και* $\|A\|_1 < \infty$.

Τελεστές Ίχνους (Trace class operators)

Πρόταση

Αν $A : H \to K$ *είναι συμπαγής, για κάθε ορθοκανονικές οικογένειες* $\{x_k\} \subseteq H$ *και* $\{y_k\} \subseteq K$*, έχουμε*

$$\sum_{k=1}^{N} |\langle Ax_k, y_k\rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) \ \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Αν επιπλέον $A \in \mathcal{C}_1(H,K)$ *τότε υπάρχουν ορθοκανονικές οικογένειες ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, y_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)\,.$$

Τελεστές Ίχνους (Trace class operators)

Στο εξής περιοριζόμαστε (για ευκολία) σε διαχωρίσιμους χώρους Hilbert.

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{C}_1(H)$, για κάθε ορθοκανονική **βάση** $\{x_k\} \subseteq H$, *έχουμε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, x_k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A) \langle f_i, e_i \rangle .$$

Συνεπώς ο αριθμός

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, x_k \rangle := \mathrm{Tr}(A)$$

(η σειρά συγκλίνει απόλυτα) δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση του H και ονομάζεται **ίχνος (trace)** του A.

Τελεστές Ίχνους (Trace class operators)

Θεώρημα

Έστω $A \in \mathcal{B}(H, K)$. *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

1. $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$.
2. $|A| \in \mathcal{C}_1(H)$.
3. *Κάθε ορθοκανονική οικογένεια* $\{x_n\}$ *του* H *ικανοποιεί* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle |A| x_k, x_k \rangle < \infty$.
4. *Υπάρχει μια ορθοκανονική* **βάση** $\{x_n\}$ *του* H *ώστε* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle |A| x_k, x_k \rangle < \infty$.
5. *Υπάρχει μια σταθερά* M *τέτοια ώστε, για κάθε ορθοκανονικές οικογένειες* $\{x_k\} \subseteq H$ *και* $\{y_k\} \subseteq K$, *να έχουμε*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle A x_k, y_k \rangle| \leq M .$$

Τελεστές Ίχνους (Trace class operators)

Πρόταση

Αν $A, B \in \mathcal{C}_1(H, K)$*, τότε*

$$\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1 .$$

Συνεπώς:
(α) Ο $\mathcal{C}_1(H, K)$ *είναι γραμμικός χώρος και*
(β) Η $\|\cdot\|_1$ *είναι νόρμα στον* $\mathcal{C}_1(H, K)$*.*

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$*, τότε* $A^* \in \mathcal{C}_1(K, H)$ *και* $\|A^*\|_1 = \|A\|_1$ *.*
Ειδικότερα αν $B \in \mathcal{C}_1(H)$ *τότε* $\mathrm{Re}\, B, \mathrm{Im}\, B \in \mathcal{C}_1(H)$ *και αν* $C = C^* \in \mathcal{C}_1(H)$ *τότε* $C_+, C_- \in \mathcal{C}_1(H)$*. Δηλαδή ο* $\mathcal{C}_1(H)$ *είναι η γραμμική θήκη των θετικών του στοιχείων.*

Οι δυικοί

Παρατήρηση

Αν ο $X \in \mathcal{B}(H)$ *είναι τελεστής ίχνους και ο* $U : H \to K$ *είναι unitary, τότε* $UXU^* \in \mathcal{C}_1(K)$ *και*

$$\mathrm{Tr}(UXU^*) = \mathrm{Tr}(X)\,.$$

Παρατήρηση

Κάθε φραγμένος τελεστής $C \in \mathcal{B}(H)$ *είναι γραμμικός συνδυασμός (τεσσάρων) unitaries.*

Πρόταση

Αν $A \in \mathcal{B}(K,H)$ *και* $B \in \mathcal{C}_1(H,K)$*, έχουμε* $AB \in \mathcal{C}_1(H)$ *και* $BA \in \mathcal{C}_1(K)$ *και ισχύει η ανισότητα* $|\mathrm{Tr}(AB)| \leq \|A\| \,\mathrm{Tr}(|B|)$ *και η ισότητα* $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Οι δυικοί

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathcal{B}(K, H)$, *η γραμμική μορφή*

$$f_A : C_1(H, K) \to \mathbb{C} : B \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$$

είναι συνεχής και $\|f_A\| \leq \|A\|_{op}$.

Πρόταση

Κάθε συνεχής γραμμική μορφή $f \in (\mathcal{C}_1(H, K))^*$ *είναι της μορφής* f_A *όπου* $A \in \mathcal{B}(K, H)$. *Ισχύει η ισότητα* $\|f_A\| = \|A\|_{op}$.
Δηλαδή ο δυικός του $\mathcal{C}_1(H, K)$ *είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον* $\mathcal{B}(K, H)$ *μέσω της απεικόνισης* $A \mapsto f_A : \mathcal{B}(K, H) \to (\mathcal{C}_1(H, K))^*$.

Οι δυικοί

Δεν ισχύει όμως ότι κάθε συνεχής γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}(H,K)$ είναι της μορφής f_A για κάποιο $A \in \mathcal{C}_1(K,H)$.

Παράδειγμα

Υπάρχει μια συνεχής γραμμική μορφή $f : \mathcal{B}(\ell^2) \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $f(e_n e_m^*) = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $f(I) = 1$.

Ισχύει το εξής:

Πρόταση

Για κάθε $A \in \mathcal{C}_1(K,H)$ η γραμμική μορφή $f_A : \mathcal{K}(H,K) \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από την $f_A(B) = \mathrm{Tr}(AB)$ είναι φραγμένη και $\|f_A\| = \|A\|_1$.
Κάθε συνεχής γραμμική μορφή στον $\mathcal{K}(H,K)$ είναι της μορφής f_A για κάποιο $A \in \mathcal{C}_1(K,H)$.
Δηλαδή ο δυικός του $\mathcal{K}(H,K)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{C}_1(K,H)$.

Πόρισμα

Ο χώρος $(\mathcal{C}_1(K,H), \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach.

Τανυστικά γινόμενα και χώροι τελεστών

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών απεικονίσεων και τελεστών

Πρόταση

Έστω $T_i : E_i \to G_i$, *για* $i = 1, 2$ *γραμμικές απεικονίσεις μεταξύ γραμμικών χώρων. Τότε, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση*

$$\begin{gathered} T_1 \otimes T_2 : E_1 \otimes E_2 \to G_1 \otimes G_2 \\ \textit{ώστε} \quad x_1 \otimes x_2 \mapsto T_1(x_1) \otimes T_2(x_2) \end{gathered}$$

για κάθε $x_1 \in E_1$ *και* $x_2 \in E_2$.

Υπενθύμιση

Έστω H, K χώροι Hilbert. Στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $H \otimes K$ ορίζεται εσωτερικό γινόμενο

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \right\rangle_{hs} := \sum_{i,j} \left\langle x_i, y_j \right\rangle_H \left\langle z_i, w_j \right\rangle_K .$$

Ονομάζουμε $H \otimes_{hs} K$ την πλήρωση του χώρου $(H \otimes K, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|\xi\|_{hs} := \langle \xi, \xi \rangle_{hs}^{1/2}$.

Τανυστικά γινόμενα γραμμικών απεικονίσεων και τελεστών

Πρόταση

Έστω H, K δύο χώροι Hilbert και $T \in \mathcal{B}(H)$, $S \in \mathcal{B}(K)$ φραγμένοι τελεστές. Η γραμμική απεικόνιση
$T \otimes S : H \otimes K \to H \otimes K : h \otimes k \mapsto T(h) \otimes S(k)$ είναι συνεχής ως προς τις νόρμες $\|\cdot\|_{hs}$. Συνεπώς επεκτείνεται σε μοναδικό φραγμένο τελεστή $H \otimes_{hs} K \to H \otimes_{hs} K$ που συμβολίζουμε επίσης $T \otimes S$, με νόρμα $\|T \otimes S\| = \|T\| \, \|S\|$.

Ο χώρος $H \otimes \ell^2[n]$

Αν H χώρος Hilbert και $n \in \mathbb{N}$, ο $H^n = H \oplus \cdots \oplus H$ είναι το ευθύ άθροισμα n-αντιγράφων του H. Είναι χώρος Hilbert με τη νόρμα $\|(h_i)_{i=1}^n\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \|h_i\|_H^2$.

Υπενθύμιση

$H \otimes \ell^2[n] \cong H^n$ ισομετρικά, μέσω της απεικόνισης

$$\sum_{i=1}^n h_i \otimes e_i \mapsto \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

Επομένως ο $H \otimes \ell^2[n]$ είναι πλήρης: $H \otimes \ell^2[n] = H \otimes_{hs} \ell^2[n]$.

Τελεστές στον χώρο $H \otimes \ell^2[n]$

Ο χώρος Hilbert $H \otimes \ell^2[n]$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον H^n, επομένως η άλγεβρα $\mathcal{B}(H \otimes \ell^2[n])$ είναι unitarily ισοδύναμη (άρα και ισομετρικά *-ισόμορφη) με την $\mathcal{B}(H^n)$.

Για κάθε $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζουμε $A : H^n \to H^n$ από τη σχέση

$$A \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix} = [a_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{nj}\xi_j \end{bmatrix}.$$

Εύκολα φαίνεται ότι ο A είναι καλά ορισμένος (απεικονίζει τον H^n στον H^n) και ότι $A \in \mathcal{B}(H^n)$. Π.χ. $\|A\|^2_{\mathcal{B}(H^n)} \leq \sum_{i,j} \|a_{ij}\|^2_{\mathcal{B}(H)}$ (άσκηση).

Για κάθε $j = 1, \dots, n$, ορίζουμε την απεικόνιση $V_j : H \to H \otimes \ell^2[n]$ από την σχέση

$$V_j : \xi \mapsto \xi \otimes e_j \,.$$

Αποδεικνύεται ότι $a_{ij} = V_i^* A V_j$.

Τελεστές στον χώρο $H \otimes \ell^2[n]$

Αντίστροφα, κάθε τελεστής $A \in \mathcal{B}(H^n)$ έχει μια αναπαράσταση ως $n \times n$ πίνακας τελεστών στον H:
Αν δοθεί $A \in \mathcal{B}(H^n)$ ορίζουμε έναν $n \times n$ πίνακα $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ από τη σχέση

$$a_{ij} = V_i^* A V_j \,.$$

Η απεικόνιση

$$\Phi : M_n(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{B}(H^n) : [a_{ij}] \to A$$

που ορίσαμε είναι ισομορφισμός *-αλγεβρών. Επομένως, μπορούμε να μεταφέρουμε τη νόρμα του $\mathcal{B}(H^n)$ στην $M_n(\mathcal{B}(H))$ ορίζοντας

$$\left\|[a_{ij}]\right\| := \left\|\Phi([a_{ij}])\right\|_{\mathcal{B}(H^n)} \,.$$

Επίσης, ένας πίνακας τελεστών $[a_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$ θα λέγεται θετικός αν και μόνον αν ο αντίστοιχος τελεστής $\Phi([a_{ij}]) \in \mathcal{B}(H^n)$ είναι θετικός.

Τελεστές στον χώρο $H \otimes \ell^2[n]$

$$\Phi^{-1} : \mathcal{B}(H \otimes \ell^2[n]) \to M_n(\mathcal{B}(H)) : A \mapsto [a_{ij}] = [V_i^* A V_j]$$

Ελέγχεται εύκολα ότι, αν $E_{ij} := e_i e_j^* \in M_n(\mathbb{C})$,

$$\Phi([a_{ij}]) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \otimes E_{ij} \,.$$

Συμπέρασμα

$\mathcal{B}(H \otimes \ell^2[n]) \simeq \mathcal{B}(H) \otimes M_n(\mathbb{C})$.

Αναπαράσταση τελεστή $T \otimes X \in \mathcal{B}(H \otimes \ell^2[n])$

Έστω $T \in \mathcal{B}(H)$ και $X \in \mathcal{B}(\ell^2[n] \simeq M_n(\mathbb{C})$. Γράφοντας $X \simeq [x_{ij}]$, έχουμε, για κάθε $\xi \in H$ και $j \in [n]$,

$$(T \otimes X)(\xi \otimes e_j) = T(\xi) \otimes Xe_j) = T(\xi) \otimes \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_{ij} T(\xi) \otimes e_i \simeq \begin{bmatrix} x_{1j} T(\xi) \\ \vdots \\ x_{nj} T(\xi) \end{bmatrix} = [x_{ij} T] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \xi \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (j-θέση)}$$

Δηλαδή

$$T \otimes X \simeq [x_{ij} T] \,.$$

«Υπερτελεστές»: Απεικονίσεις μεταξύ χώρων τελεστών

Έστω $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ γραμμική απεικόνιση μεταξύ αλγεβρών (ή χώρων τελεστών). Ορίζουμε

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}) \;\text{ όπου }\; \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Ισοδύναμα

$$\Phi_n : \mathcal{A} \otimes M_n \to \mathcal{B} \otimes M_n : \; \Phi_n(a \otimes E_{ij}) = \Phi(a) \otimes E_{ij}$$

δηλαδή

$$\Phi_n = \Phi \otimes \mathrm{id}_{M_n} .$$

Αν οι $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι *-άλγεβρες και η Φ διατηρεί την ενέλιξη, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.
Αν η Φ είναι *-μορφισμός, το ίδιο ισχύει για την Φ_n.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

$$\Phi_n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B}) \text{ όπου } \Phi_n([a_{ij}]) = [\Phi(a_{ij})].$$

Υπενθύμιση

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ είναι θετική ανν $a \geq 0 \Rightarrow \Phi(a) \geq 0$.

ΔΕΝ έπεται πάντα ότι η Φ_n είναι θετική.

Πλήρως θετικές απεικονίσεις

Παράδειγμα Αν $\Phi(a) = a^\dagger$ (ανάστροφος) στην $\mathcal{A} = M_2$: προφανώς θετική. Όμως

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

θετικός στην $M_2(M_2) \simeq M_4$, αλλά

$$\Phi_2(A) = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

όχι θετικός.

Ορισμός

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών λέγεται πλήρως θετική αν η Φ_n είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

C*-άλγεβρες και πλήρως θετικές απεικονίσεις: Εισαγωγή

C*-άλγεβρες

Ορισμός

Ενέλιξη (involution) σε μια μιγαδική άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι μια απεικόνιση $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$, που έχει τις ιδιότητες:
(α) είναι αντιγραμμική, δηλαδή $(a + \lambda b)^* = a^* + \bar{\lambda} b^*$.
(β) $a^{**} = a$.
(δ) $(ab)^* = b^* a^*$.
για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Παράδειγμα, η $A \to A^*$ στον $\mathcal{B}(H)$
(όπου $\langle A^* y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle$ για κάθε $x, y \in H$.
Επίσης, η $f \to f^*$ στην $C(K)$, όπου $f^*(t) = \overline{f(t)}$, $t \in K$
(όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff – πχ. μετρικός).

C*-άλγεβρες

Ορισμός

Άλγεβρα Banach είναι ένας χώρος Banach $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ που είναι και άλγεβρα με την ιδιότητα $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$.

Ορισμός

C*-άλγεβρα είναι μια άλγεβρα Banach $\mathcal{A}$ εφοδιασμένη με μια ενέλιξη $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$ που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη ιδιότητα C*:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2 .$$

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$-κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα ανν είναι αυτοσυζυγής (selfadjoint), δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Αναπαραστάσεις

Αναπαράσταση (representation) (π, H) μιάς C* άλγεβρας $\mathcal{A}$ λέγεται μια απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ (όπου H χώρος Hilbert) που είναι μορφισμός *-αλγεβρών, δηλαδή

$$\begin{aligned}
\pi(a + \lambda b) &= \pi(a) + \lambda\pi(b) \\
\pi(ab) &= \pi(a)\pi(b) \\
\pi(a^*) &= (\pi(a))^*
\end{aligned}$$

για κάθε $a, b \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$. Γράφουμε $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$.

Η αναπαράσταση $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$ λέγεται πιστή (faithful) αν είναι 1-1. Λέγεται μη εκφυλισμένη (non-degenerate) αν $\overline{\mathrm{span}(\pi(\mathcal{A})(H))} = H$.

Θεώρημα διαστολής του Stinespring

Παραδείγματα πλήρως θετικών (cp) απεικονίσεων: (δηλ. $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ώστε η $\Phi_n = \Phi \otimes \mathrm{id} : \mathcal{A} \otimes M_n \to \mathcal{B} \otimes M_n$ να είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κάθε *-μορφισμός π είναι θετικός ($\pi(a^*a) = \pi(a)^*\pi(a) \geq 0 \ \forall a$).
Άρα κάθε *-μορφισμός είναι πλήρως θετικός (γιατί π_n *-μορφισμός).
Κάθε απεικόνιση $a \to V^*aV$ είναι πλήρως θετική
(εδώ $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και $V \in \mathcal{B}(H)$). Σύνθεση:
Επομένως κάθε $a \to V^*\pi(a)V$ είναι πλήρως θετική.
Δεν υπάρχουν άλλες:

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε [μοναδιαία] πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ από μια C-άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα στον $\mathcal{B}(H)$ υπάρχει (π, H_ϕ, V) όπου π είναι *-αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $V : H \to H_\phi$ είναι φραγμένος τελεστής [ισομετρία], ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } \ a \in \mathcal{A}.$$

(Απόδειξη αργότερα)

Υπενθύμιση: Κλασικές και Κβαντικές καταστάσεις

Αν S είναι (πεπερασμένο) σύνολο, μια κλασική κατάσταση στο S είναι ένα μέτρο πιθανότητας μ στο S.

Αν H είναι μιγαδικός χώρος Hilbert (πεπερασμένης διάστασης), μια κβαντική κατάσταση στον H είναι ένας θετικός τελεστής $\rho \in \mathcal{C}_1(H)$ με $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$.

$D(H)$: το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων στον H.

$$D(H) = \{\rho \in \mathcal{C}_1(H) : \rho \geq 0, \, \mathrm{Tr}(\rho) = 1\}$$

το σύνολο των κβαντικών καταστάσεων στον H.

Γενικότερα:

Αν $\mathcal{A}$ είναι C*-άλγεβρα με μονάδα, state είναι μια θετική γραμμική μορφή $\omega : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ νόρμας 1.

Για $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ με $\dim H < \infty$, states είναι ακριβώς οι κβαντικές καταστάσεις: $\omega(A) = \mathrm{Tr}(\rho A)$.

Για $\mathcal{A} = \mathbb{C}^S$ ή γενικότερα $\mathcal{A} = C(K)$ (όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff), states είναι ακριβώς τα μέτρα πιθανότητας.

Quantum Channels

Αν $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ είναι γραμμική $(\dim H . \dim K < \infty)$ θέλω η δυική $\Phi^* : \mathcal{C}_1(K) \to \mathcal{C}_1(H)$ να στέλνει καταστάσεις σε καταστάσεις, δηλ. $\Phi^*(D(K)) \subseteq D(H)$.

Εδώ

$$\langle \Phi^*(\rho), T \rangle := \langle \rho, \Phi(T) \rangle \quad \forall \rho \in \mathcal{C}_1(K), T \in \mathcal{B}(H)$$

όπου $\langle \rho, A \rangle = \mathrm{Tr}(\rho A)$.

Ειδικότερα θέλω $\Phi^* \geq 0$ (positivity preserving $\equiv$ positive) (ισοδύναμα $\Phi \geq 0$)
και $\mathrm{Tr}(\Phi^*(\rho)) = \mathrm{Tr}(\rho)\ \forall \rho$ (ισοδύναμα $\Phi(I) = I$.)

Παρατήρηση Αν $\Phi_1^*(D(K_1)) \subseteq D(H_1)$ και $\Phi_2^*(D(K_2)) \subseteq D(H_2)$, θα ήθελα

$$(\Phi_1^* \otimes \Phi_2^*)(D(K_1 \otimes K_2)) \subseteq D(H_1 \otimes H_2).$$

Είδαμε ότι αυτό δεν συμβαίνει πάντα (πργδ. $\Phi_1 : M_2 \to M_2 : A \to A^\dagger$ (ανάστροφος) και $\Phi_2 : M_2 \to M_2 : B \to B$).

Quantum Channels

Υπενθύμιση

Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών είναι πλήρως θετική (completely positive) αν η $\Phi_n := \Phi \otimes \mathrm{id} : \mathcal{A} \otimes M_n \to \mathcal{B} \otimes M_n$ είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Γράφουμε $\Phi \geq_{cp} 0$.

Αν Φ_1^*, Φ_2^* είναι CP τότε η $\Phi_1^* \otimes \Phi_2^*$ είναι CP. (Απόδειξη αργότερα) Γι αυτό ορίζουμε

Ορισμός

Quantum channel λέγεται μια γραμμική απεικόνιση $\Phi^* : \mathcal{C}_1(K) \to \mathcal{C}_1(H)$ (H, K πεπερασμένης διάστασης) αν είναι πλήρως θετική και διατηρεί το ίχνος (completely positive trace preserving, CPTP) ισοδύναμα αν η $\Phi : \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$ είναι πλήρως θετική και διατηρεί τη μονάδα I (unital completely positive, UCP).

Υπενθύμιση: Συναρτησιακός λογισμός

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα 1 και $a \in \mathcal{A}$. Το φάσμα του a είναι το

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda 1 \text{ δεν έχει αντίστροφο στην } \mathcal{A}\}.$$

Αποδεικνύεται ότι το φάσμα κάθε στοιχείου είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Επίσης, το φάσμα ενός στοιχείου δεν εξαρτάται από την C* άλγεβρα στην οποία υπολογίζεται, με την ακόλουθη έννοια: Αν $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ είναι μια C* υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ με $1 \in \mathcal{B}$, τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Συναρτησιακός λογισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ αυτοσυζυγές. Για κάθε συνεχή $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό $f(a) \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $f(a) = \lim p_n(a)$ όπου (p_n) πολυώνυμα με $\|p_n - f\|_{\sigma(a)} \to 0$.
Η απεικόνιση $f \mapsto f(a) : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ είναι ισομετρικός *-μορφισμός.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Ορισμός

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Ένα $a \in \mathcal{A}$ λέγεται θετικό (γράφουμε $a \geq 0$) αν $a = a^*$ και $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$.
Θέτουμε $\mathcal{A}_+ = \{a \in \mathcal{A} : a \geq 0\}$.
Αν a, b *είναι αυτοσυζυγή,* λέμε ότι $a \leq b$ όταν $b - a \in \mathcal{A}_+$.

Παραδείγματα

• Στον $C(K)$: $f \geq 0$ ανν $f(t) \in \mathbb{R}_+$ για κάθε $t \in K$ (γιατί $\sigma(f) = f(K)$).
• Στην $M_n(\mathbb{C})$: $T \geq 0$ ανν ο T διαγωνοποιείται και έχει μη αρνητικές ιδιοτιμές, ισοδύναμα ανν είναι θετικά ημιορισμένος, δηλ. $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$.
• Στην $\mathcal{B}(H)$: $T \geq 0$ ανν $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ για κάθε $\xi \in H$.

Ο θετικός κώνος μιας C* άλγεβρας

Πρόταση

Κάθε θετικό στοιχείο μιάς C άλγεβρας $\mathcal{A}$ έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα. Μάλιστα*

$$a \in \mathcal{A}_+ \quad \text{αν και μόνον αν υπάρχει } \; b \in \mathcal{A}_+ \text{ ώστε } \; a = b^2 .$$

Πρόταση

Κάθε αυτοσυζυγές στοιχείο a μιάς C άλγεβρας $\mathcal{A}$ (με μονάδα) γράφεται $a = a_+ - a_-$ όπου $a_+, a_- \in \mathcal{A}_+$ (μάλιστα, $a_+, a_- \in C^*(1, a)$) ώστε $a_+ a_- = a_- a_+ = 0$.*
Επομένως, κάθε στοιχείο $x \in \mathcal{A}$ είναι γραμμικός συνδυασμός τεσσάρων θετικών στοιχείων: $x = a + ib$ όπου $a = a^*, b = b^*$, άρα $x = (a_+ - a_-) + i(b_+ - b_-)$.

Θεώρημα

Σε μια C άλγεβρα $\mathcal{A}$, ένα στοιχείο είναι θετικό αν-ν είναι της μορφής $a^* a$.*

Θετικές γραμμικές μορφές

Πρόταση

Κάθε θετική γραμμική μορφή είναι συνεχής. Όταν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα και η ϕ είναι θετική, $\|\phi\| = \phi(1)$. [4]

Απόδειξη (όταν $1 \in \mathcal{A}$)

$0 \le a^*a \le \|a^*a\| 1 = \|a\|^2 1 \to 0 \le \phi(a^*a) \le \|a\|^2 \phi(1)$. Αλλά $|\phi(a)|^2 = |\phi(1^*a)|^2 \le \phi(a^*a)\phi(1^*1)$ άρα $|\phi(a)|^2 \le \|a\|^2 \phi(1)^2$.

Παραδείγματα καταστάσεων (θετικών γραμμικών μορφών νόρμας 1)

1. Στην $\mathcal{B}(H)$, (i) η $\phi(T) = \langle T\xi, \xi \rangle$ (όπου $\xi \in H$ νόρμας 1)
2. (ii) η $\psi(T) = \sum_i \langle T\xi_i, \xi_i \rangle$ όπου $\sum \|\xi_i\|^2 = 1$.
3. Στην $C(K)$, (i) η $\phi(f) = f(t_0)$ όπου $t_0 \in K$
4. (ii) η $\psi(f) = \int f d\mu$ όπου μ μέτρο πιθανότητας.
5. Σε μια C* άλγεβρα $\mathcal{A}$, αν $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ είναι μια αναπαράσταση και $\xi \in H$ νόρμας 1, η $\phi(a) = \langle \pi(a)\xi, \xi \rangle$.

Αντίστροφο του (5):

Κάθε κατάσταση σε μια C* άλγεβρα ορίζει μια αναπαράσταση:

[4] ... και αντίστροφα, δες gns21.pdf.

Η Αναπαράσταση GNS

Συμβολίζουμε $\mathcal{S}(\mathcal{A})$ το σύνολο των καταστάσεων μιας C* άλγεβρας $\mathcal{A}$.

Θεώρημα (Gelfand, Naimark, Segal)

Για κάθε κατάσταση ϕ σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\phi, H_\phi, \xi_\phi)$ όπου π_ϕ είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ στον χώρο Hilbert H_ϕ και $\xi_\phi \in H_\phi$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα ώστε

$$\phi(a) = \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle \quad \textit{για κάθε} \;\; a \in \mathcal{A}.$$

Βήματα απόδειξης GNS [5]

1. Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.
2. Εφοδιάζεται με το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle a,b\rangle_0 := \phi(b^*a)$.
   Όταν $\mathcal{A} = C(X)$ έχουμε $\langle a,b\rangle_0 = \int_X a(t)\overline{b(t)}d\mu(t)$.
3. Αφού ϕ θετική, $\langle a,a\rangle_0 = \phi(a^*a) \geq 0$.
   Λόγω Cauchy-Schwarz το σύνολο
   $\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} \, : \langle u,u\rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.
4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ $(= L^2(\mu))$ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς την $\|[a]\|_\phi := \sqrt{\langle a,a\rangle_0}$.
   (γράφω $[a] = a + \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$).

[5] Απόδειξη στο gns21.pdf.

Βήματα απόδειξης GNS II

5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον γραμ. χώρο $\mathcal{A}$ έτσι: $\pi_0(a)(b) = ab$.

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$.

7. Δείχνουμε ότι $\|\pi_1(a)([b])\|_\phi \le \|a\| \, \|[b]\|_\phi$.
   [Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, $\|ab\|_2 \le \|a\|_\infty \|b\|_2$.]
   Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.

   Εύκολο: η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.
   [Όταν $\mathcal{A} = C(X)$, τότε $\pi_\phi(a) = M_a$ δηλ.
   $(\pi_\phi(a)b)(t) = a(t)b(t)$ μ-σχεδόν για κάθε $t \in X$.]

8. Θέτουμε $\xi_\phi = [1_{\mathcal{A}}]$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle \pi_\phi(a)\xi_\phi, \xi_\phi \rangle_{H_\phi} &= \langle \pi_\phi(a)[1], [1] \rangle_{H_\phi} \\ &= \langle a, 1 \rangle_{H_\phi} = \phi(1^* a) = \phi(a) . \end{aligned} \qquad \square$$

Κάθε C*-άλγεβραι έχει πιστή αναπαράσταση

Θεώρημα (Gelfand-Naimark)

Κάθε C^*-άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ισομορφική, ως C^*-άλγεβρα, με μία κλειστή αυτοσυζυγή υπάλγεβρα κάποιου $\mathcal{B}(H)$. Ακριβέστερα, υπάρχει χώρος Hilbert H και απεικόνιση $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ που διατηρεί την αλγεβρική δομή (άθροισμα, γινόμενο, ενέλιξη) και την νόρμα.

Η ιδέα της απόδειξης Αν η $\mathcal{A}$ έχει μονάδα: Για κάθε $\phi \in \mathcal{S}(\mathcal{A})$ (:state της $\mathcal{A}$), θεωρώ την αναπαράσταση GNS (π, H_ϕ). Ονομάζω $\pi := \oplus_\phi \pi_\phi$ το ευθύ άθροισμα των απεικονίσεων π_ϕ που δρα στο ευθύ άθροισμα $H := \oplus_\phi H_\phi$ των χώρων H_ϕ. Αποδεικνύω ότι η π είναι 1-1 (εφαρμογή Hahn Banach!) οπότε είναι αυτομάτως ισομετρία.
Αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα: την εμφυτεύω στη «μοναδοποίηση» $\mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$.

Η Αναπαράσταση GNS: Μοναδικότητα

Αν $\mathcal{A} \overset{\pi}{\curvearrowright} H$, ένα $\xi \in H$ λέγεται *κυκλικό για την π* αν το $\pi(\mathcal{A})\xi = \{\pi(a)\xi : a \in \mathcal{A}\}$ είναι πυκνό στον H.

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ C άλγεβρα με μονάδα και ϕ κατάσταση στην $\mathcal{A}$. Αν (π, H, ξ) αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε*

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = \phi(a) \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$. Δηλαδή υπάρχει μια επί ισομετρία $U : H_\phi \to H$ ώστε

$$\pi(a) = U\pi_\phi(a)U^* \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}$$

και $U\xi_\phi = \xi$.

Η Αναπαράσταση GNS στην QIT

Ειδική περίπτωση: $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$.

Παρατήρηση: Κάθε $\rho \in \mathcal{C}_1(H)$ ορίζει γραμμική

$$\phi_\rho : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : a \mapsto \mathrm{Tr}(\rho a)\,.$$

Αν $\rho \in D(H)$ τότε η ϕ_ρ είναι κατάσταση στην $\mathcal{A}$.
Αν $\rho = \sum_n s_n \xi_n \xi_n^*$ είναι 1-1, η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την (π, H_1, ξ) όπου $H_1 = H \otimes \ell^2(\mathbb{N})$, $\pi(a) = a \otimes I$ και $\xi = \sum_n \sqrt{s_n}\xi_n \otimes e_n$.

Απόδειξη: Άσκηση.

Θεώρημα Stinespring και συστήματα τελεστών

Stinespring: Operator-valued GNS

Θεώρημα (Stinespring)

Για κάθε (μοναδιαία) πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *από μια* C^**-άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *με μονάδα στον* $\mathcal{B}(H)$ *υπάρχει* (π, H_ϕ, V) *όπου* π *είναι* $*$*-αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$ *στον χώρο Hilbert* H_ϕ *και* $V : H \to H_\phi$ *είναι φραγμένη (ισομετρία), ώστε*

$$\Phi(a) = V^*\pi(a)V \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

(Πλήρης απόδειξη στο stineproof21.pdf.)

Σχόλιο: Όταν $\dim H = 1$, το Θεώρημα Stinespring συμπίπτει με την κατασκευή GNS. Η πλήρης θετικότητα ικανοποιείται αυτομάτως:

Πρόταση

Έστω $\mathcal{A}$ *μια* C^**-άλγεβρα με μονάδα. Μια γραμμική μορφή* $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ *είναι πλήρως θετική αν (και μόνον αν) είναι θετική.*

Βήματα απόδειξης Stinespring

1. Αντί για τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$, θεωρούμε τον

$$\widetilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \otimes H \,.$$

Όταν $H = \mathbb{C}$ έχουμε $\mathcal{A} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{A}$.

2. Στον $\widetilde{\mathcal{A}}$ ορίζουμε $\langle a \otimes \xi, b \otimes \eta \rangle_0 := \langle \Phi(b^* a)\xi, \eta \rangle_H$ και επεκτείνουμε γραμμικά. Δηλαδή

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} b_m \otimes \xi_m \right\rangle_0 := \sum_{n,m} \langle \Phi(b_m^* a_n)\xi_n, \xi_m \rangle_H \,.$$

Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $\langle a, b \rangle_0 = \phi(b^* a)$.

3. Χρησιμοποιώντας ότι η Φ είναι πλήρως θετική δείχνουμε ότι

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0 = \left\langle \sum_{n=1}^{N} a_n \otimes \xi_n, \sum_{m=1}^{N} a_m \otimes \xi_m \right\rangle_0 \geq 0.$$

Από Cauchy-Schwarz το σύνολο
$\mathcal{N}_\phi = \mathcal{N} := \{\vec{u} \in \widetilde{\mathcal{A}} : \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle_0 = 0\}$ είναι γραμμικός χώρος.

Βήματα απόδειξης Stinespring II

4. Θέτουμε $H_{0\phi} := \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$ και ονομάζουμε H_ϕ την πλήρωση του $H_{0\phi}$ ως προς τη νόρμα $\|[\vec{a}]\|_\phi := \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle_0}$ (καλά ορισμένη) (γράφω $[\vec{a}] = \vec{a} + \mathcal{N}$, $\vec{a} \in \widetilde{\mathcal{A}}$).
5. Η $\mathcal{A}$ δρα στον $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \otimes H$ ως εξής:

$$\pi_0(a)(b \otimes \xi) := ab \otimes \xi \quad (a, b \in \mathcal{A}, \xi \in H)$$

(Όταν $\mathcal{H} = \mathbb{C}$ έχουμε $[\pi_0(a)(b) = ab]$).

6. Επειδή $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, ο τελεστής $\pi_0(a)$ επάγει καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση $\pi_1(a)$ στον $H_{0\phi} = \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{N}$:

$$\pi_1(a)[b \otimes \xi] = [ab \otimes \xi].$$

Βήματα απόδειξης Stinespring III

7 Δείχνουμε ότι $\left\|\pi_1(a)([\vec{b}])\right\|_\phi \leq \|a\| \left\|[\vec{b}]\right\|_\phi$.
Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή $\pi_\phi(a)$ στον H_ϕ.
Δείχνουμε ότι η $\pi_\phi : a \to \pi_\phi(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\phi)$ είναι *-αναπαράσταση.

8 Ορίζουμε

$$V : H \to \widetilde{\mathcal{A}} \to H_\phi : \xi \to \mathbf{1}_\mathcal{A} \otimes \xi \to [\mathbf{1}_\mathcal{A} \otimes \xi].$$

Η V είναι φραγμένη από $\|\Phi(\mathbf{1})\|^{1/2}$.
Τέλος, για κάθε $\xi, \eta \in H$,

$$\begin{aligned}\left\langle (V^*\pi_\phi(a)V)\xi, \eta \right\rangle_H &= \left\langle \pi_\phi(a)V\xi, V\eta \right\rangle_{H_\phi} = \left\langle \pi_\phi(a)[\mathbf{1} \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \eta] \right\rangle_{H_\phi} \\ &= \langle [a \otimes \xi], [\mathbf{1} \otimes \eta] \rangle_{H_\phi} = \left\langle \Phi(\mathbf{1}^* a)\xi, \eta \right\rangle_H .\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$V^*\pi_\phi(a)V = \Phi(a). \qquad \square$$

Αναπαραστάσεις (ή διαστολές) Stinespring

Πρόταση

Αν (π_1, H_1, V_1) *και* (π_2, H_2, V_2) *είναι δυο τριάδες Stinespring για την πλήρως θετική απεικόνιση* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *(δηλαδή*

$$V_1^*\pi_1(a)V_1 = \Phi(a) = V_2^*\pi_2(a)V_2 \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A}.$$

τότε υπάρχει μερική ισομετρία $W \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ *ώστε*

$$\begin{aligned} W\pi_1(a) &= \pi_2(a)W \quad \text{για κάθε } a \in \mathcal{A} \text{ και} \\ WV_1 &= V_2\,. \end{aligned}$$

Μία τριάδα Stinespring λέγεται ελαχιστική (minimal) αν ικανοποιεί $\overline{\text{span}}\{\pi(a)V\xi : a \in \mathcal{A}, \xi \in H\} = H_\phi\,.$

Πόρισμα (Μοναδικότητα)

Αν (π_1, H_1, V_1) *και* (π_2, H_2, V_2) *είναι δυο* ελαχιστικές *τριάδες Stinespring για την πλήρως θετική απεικόνιση* $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H)$ *τότε είναι unitarily ισοδύναμες, δηλ. η μερική ισομετρία* W *της Πρότασης απεικονίζει τον* H_1 *ισομετρικά επί του* H_2.

Εφαρμογή: Απεικονίσεις Schur

Αν $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, η απεικόνιση

$$S_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C}) : [b_{ij}] \mapsto [a_{ij} b_{ij}]$$

ονομάζεται απεικόνιση Schur.

Πρόταση

Αν $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$, τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. $A \in M_n(\mathbb{C})^+$.
2. $S_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *θετική.*
3. $S_A : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ *πλήρως θετική.*

Θεώρημα Choi, αναπαράσταση Kraus

Θεώρημα

Αν $\mathcal{B}$ είναι μια C^* άλγεβρα και $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$ γραμμική, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

1. *Η Φ είναι πλήρως θετική.*
2. *Η Φ είναι d-θετική.*
3. *Ο πίνακας $[\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.*
   (Οι E_{rs} είναι τα matrix units της $M_d(\mathbb{C})$.)

Αναπαράσταση Kraus Στην περίπτωση $\mathcal{B} = M_k(\mathbb{C})$, η πλήρης θετικότητα της Φ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη γραμμικών απεικονίσεων $V_1, \dots V_{kd} \in M_{kd} = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$ ώστε

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{dk} V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C}) \,.$$

Ο ελάχιστος αριθμός μη μηδενικών V_j που απαιτούνται για την αναπαράσταση Kraus της Φ ονομάζεται *τάξη Kraus* της Φ.
(Πλήρης απόδειξη στο choiarv.pdf.)

Συστήματα τελεστών και Θεώρημα επέκτασης Arveson

Συστήματα τελεστών (Operator Systems)

Σύστημα τελεστών (operator system) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (ή $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ όπου $\mathcal{B}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα) που είναι αυτοσυζυγής και περιέχει την μονάδα.

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ είναι σύστημα τελεστών, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $M_n(\mathcal{S}) \subseteq M_n(\mathcal{B})$ είναι σύστημα τελεστών, αν εφοδιασθεί με την δομή (ενέλιξη, μονάδα και θετικό κώνο $M_n(\mathcal{S})^+ := M_n(\mathcal{B})^+ \cap M_n(\mathcal{S})$) που κληρονομεί από την C* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B})$.

Αν $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ είναι συστήματα τελεστών, μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ λέγεται θετική αν $\varphi(\mathcal{S}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$ και πλήρως θετική αν για κάθε n η απεικόνιση $\varphi^n : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{T}) : [x_{ij}] \mapsto [\varphi(x_{ij})]$ είναι θετική.

Αντιστοιχία Arveson

Συμβολισμοί Αν V είναι operator system και $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ γραμμική απεικόνιση, ορίζουμε μια γραμμική μορφή $s_\phi : M_d(V) \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$s_\phi(A) = \frac{1}{d} \sum_{i,j=1}^{d} \left\langle \phi(a_{i,j}) e_j, e_i \right\rangle_{\ell^2[d]}, \quad A = [a_{i,j}] \in M_d(V)$$

όπου $\{e_j\}_{j=1}^{d}$ η κανονική βάση του $\ell^2[d]$.

Θεώρημα

Έστω V ένα σύστημα τελεστών, $d \in \mathbb{N}$ και $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :

(1) *Η $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική.*

(2) *Η $\phi : V \to M_d(\mathbb{C})$ είναι d-θετική.*

(3) *Η $s_\phi : M_d(V) \to \mathbb{C}$ είναι θετική.*

(Πλήρης απόδειξη στο choiarv.pdf.)

Επέκταση θετικών απεικονίσεων

Πρόταση

Αν V είναι ένα σύστημα τελεστών και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια γραμμική μορφή, τότε η ω είναι θετική αν και μόνον αν (είναι φραγμένη και) $\|\omega\| = \omega(1)$ (όπου 1 η μονάδα του V).

Παράδειγμα: Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \to M_2(\mathbb{C})$.

Λήμμα

Έστω V ένα σύστημα τελεστών.
(1) Αν $a \in V$, το $\left[\begin{smallmatrix} 1 & a \\ a^* & 1 \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό αν και μόνον αν $\|a\| \leq 1$.
(2) Έστω $a \in V$ και $p \in V^+$. Αν το $\left[\begin{smallmatrix} p & a \\ a^* & p \end{smallmatrix}\right] \in M_2(V)$ είναι θετικό, τότε $\|a\| \leq \|p\|$.

Πρόταση

Αν V ένα σύστημα τελεστών και $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ είναι 2-θετική, τότε $\|\Phi\| = \|\Phi(1)\|$ (δηλαδή $\|\Phi(v)\| \leq \|\Phi(1)\|$ για κάθε $v \in V$ με $\|v\| \leq 1$).

Επέκταση πλήρως θετικών απεικονίσεων

Πρόταση

Αν V ένα σύστημα τελεστών και $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|\Phi^{(n)}\| = \|\Phi(1)\|$ (δηλαδή $\|[\Phi(v_{ij})]\| \leq \|\Phi(1)\|$ για κάθε $v = [v_{ij}] \in M_n(V)$ με $\|v\| \leq 1$).

Θέτοντας $\|\Phi\|_{cb} := \sup_n \|\Phi^{(n)}\|$, λέμε ότι η Φ είναι *πλήρως φραγμένη (completely bounded)* αν $\|\Phi\|_{cb} < \infty$.

Πρόταση (Krein)

Αν $V \subseteq W$ είναι συστήματα τελεστών και $\omega : V \to \mathbb{C}$ μια θετική γραμμική μορφή, τότε η ω έχει επέκταση σε μια γραμμική μορφή $\tilde{\omega} : W \to \mathbb{C}$ που είναι θετική.

Παράδειγμα: Το συμπέρασμα δεν ισχύει για θετική $\omega : V \to M_2(\mathbb{C})$.

Θεώρημα επέκτασης Arveson

Θεώρημα (Arveson)

Αν $V \subseteq W$ *είναι συστήματα τελεστών και* $\Phi : V \to \mathcal{B}(H)$ *μια πλήρως θετική γραμμική απεικόνιση, τότε η* Φ *έχει επέκταση σε μια γραμμική απεικόνιση* $\tilde{\Phi} : W \to \mathcal{B}(H)$ *που είναι πλήρως θετική.*

Πρόταση

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$ *είναι σύστημα τελεστών σε μια C* άλγεβρα* $\mathcal{A}$ *με μονάδα και* $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{B}(H)$ *είναι πλήρως θετική απεικόνιση, υπάρχει* (π, H_ϕ, V) *όπου* π *είναι *-αναπαράσταση της* $\mathcal{A}$ *στον χώρο Hilbert* H_ϕ *και* $V : H \to H_\phi$ *είναι φραγμένη, ώστε*

$$\Phi(x) = V^* \pi(x) V \quad \text{για κάθε } x \in \mathcal{S}.$$

Δυο κουβέντες για Άλγεβρες von Neumann

(Λεπτομέρειες στο vNa.pdf.)

Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (sot) στον $\mathcal{B}(H)$

Ορισμός

Έστω H χώρος Hilbert. Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (strong operator topology, sot) στον $\mathcal{B}(H)$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης κατά σημείο στον H. Δηλαδή ένα δίκτυο (T_i) από φραγμένους τελεστές συγκλίνει στον φραγμένο τελεστή T ως προς την sot αν και μόνον αν, για κάθε $x \in H$, $\|T_i x - Tx\|_H \to 0$.

Παρατήρηση

$$T_i \overset{\text{sot}}{\to} T \iff \forall n, \forall \vec{x} \in H^{(n)} : \|T_i^{(n)} \vec{x} - T^{(n)} \vec{x}\|_{H^{(n)}} \to 0 .$$

Η ισχυρή τοπολογία τελεστών (sot) στον $\mathcal{B}(H)$

Η sot είναι η ασθένεστερη τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ για την οποία όλες οι ημινόρμες $\{p_x, x \in H\}$ (όπου $p_x(T) = \|Tx\|$) είναι συνεχείς.
Είναι η τοπολογία στον $\mathcal{B}(H)$ που παράγεται από (έχει υποβάση) τα σύνολα $\{V(A,x) : A \in \mathcal{B}(H), x \in H\}$, όπου
$V(A,x) := \{T \in \mathcal{B}(H) : \|Tx - Ax\| < 1\}$.

Παρατήρηση Η sot δεν είναι μετρικοποιήσιμη, όταν $\dim H = \infty$. Για παράδειγμα, αν $\mathcal{E} = \{\sqrt{n}P_n :\in \mathbb{N}\}$ όπου οι P_n είναι κάθετες ανά δύο μονοδιάστατες προβολές, ο $0 \in \mathcal{B}(H)$ ανήκει στην sot-κλειστή θήκη του $\mathcal{E}$, αλλά δεν είναι sot-όριο ακολουθίας από το $\mathcal{E}$.

Άλγεβρες von Neumann

Ορισμός

Αν H είναι χώρος Hilbert και $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, ορίζω τον μεταθέτη (commutant) $\mathcal{S}'$ του $\mathcal{S}$ ως εξής

$$\mathcal{S}' = \{T \in \mathcal{B}(H) : TS = ST \text{ για κάθε } S \in \mathcal{S}\}.$$

Το $\mathcal{S}'$ είναι πάντα άλγεβρα και περιέχει τον I_H. Επίσης, είναι sot-κλειστή. Η $\mathcal{S}'$ είναι *-άλγεβρα αν-ν το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο, οπότε είναι C* άλγεβρα, αφού είναι norm-κλειστή.

Άλγεβρες von Neumann

Ορισμός

Έστω (X, μ) χώρος μέτρου. Η πολλαπλασιαστική άλγεβρα $\mathcal{M}_\mu$ του (X, μ) είναι η

$$\mathcal{M}_\mu = \{M_f : f \in L^\infty(X, \mu)\}.$$

Η $\mathcal{M}_\mu$ είναι αβελιανή C^*-υπάλγεβρα της $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

Πρόταση

Αν ο (X, μ) είναι σ-πεπερασμένος, τότε $(\mathcal{M}_\mu)' = \mathcal{M}_\mu$. Ισοδύναμα, η $\mathcal{M}_\mu$ είναι μεγιστική αβελιανή αυτοσυζυγής υπάλγεβρα (maximal abelian selfadjoint algebra - masa) του $\mathcal{B}(L^2(X, \mu))$.

Παράδειγμα

Αν $H = L^2([0, 1], m)$ (m: μέτρο Lebesgue) και $\mathcal{M}_0 = \{M_f : f \in C([0, 1])\} \subseteq \mathcal{B}(L^2([0, 1], m))$, τότε $\mathcal{M}_0' = \mathcal{M}_m$.

Ορισμός

Έστω H χώρος Hilbert. Μία άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον H είναι ένα αυτοσυζυγές υποσύνολο του $\mathcal{B}(H)$ που ικανοποιεί

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}''.$$

Παρατηρήσεις

(i) Κάθε άλγεβρα von Neumann είναι C^*-άλγεβρα με μονάδα. Επιπλέον όμως είναι sot-κλειστή.

(ii) Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$, τότε το σύνολο $(\mathcal{S} \cup \mathcal{S}^*)''$ είναι η μικρότερη άλγεβρα von Neumann που περιέχει το $\mathcal{S}$, και ονομάζεται η άλγεβρα von Neumann που παράγεται από το $\mathcal{S}$.

(iii) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathcal{S}'$ για κάποιο αυτοσυζυγές σύνολο $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (π.χ. $\mathcal{S} = \mathcal{M}'$).

(iv) Κάθε άλγεβρα von Neumann $\mathcal{M}$ στον H είναι της μορφής $\mathcal{U}'$ για κάποια ομάδα $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{B}(H)$ που αποτελείται από unitary τελεστές.

Θεώρημα δεύτερου μεταθέτη (Bicommutant Theorem)

Θεώρημα (von Neumann)

Έστω $\mathcal{A}$ μία αυτοσυζυγής υπάλγεβρα του $\mathcal{B}(H)$ που περιέχει τον ταυτοτικό τελεστή. Τότε

$$\mathcal{A}'' = \overline{\mathcal{A}}^{\text{sot}}$$

Ειδικότερα, η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα von Neumann αν και μόνον αν είναι SOT-κλειστή.

Λήμμα

Έστω $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ και H_0 κλειστός υπόχωρος του H, και P η ορθή προβολή στον H_0. Ο H_0 είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος (δηλ. $S(H_0) \subseteq H_0$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$) αν και μόνον αν $SP = PSP$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$.
Αν επί πλέον το $\mathcal{S}$ είναι αυτοσυζυγές σύνολο, τότε ο H_0 είναι $\mathcal{S}$-αναλλοίωτος αν και μόνον αν $SP = PS$ για κάθε $S \in \mathcal{S}$, δηλ. αν και μόνον αν $P \in \mathcal{S}'$.

Η άλγεβρα von Neumann μιας ομάδας

Η αριστερή κανονική αναπαράσταση μιας ομάδας

Έστω G μια (αριθμήσιμη) ομάδα. *(Για παράδειγμα, το $\mathbb{Z}$ ή η $\mathbb{F}_2$.)*
Θεωρούμε τον χώρο Hilbert

$$\ell^2(G) = \ell^2 G = \{f : G \to \mathbb{C} : \sum_{t \in G} |f(t)|^2 < \infty\}.$$

Ο $\ell^2(G)$ έχει ορθοκανονική βάση $\{\delta_t : t \in G\}$.
Για κάθε $s \in G$ ορίζουμε μια απεικόνιση

$$\lambda_s : \delta_t \to \delta_{st}$$

και επεκτείνουμε γραμμικά σε απεικόνιση $\lambda_s : c_{00}G \to c_{00}G$. Η επέκταση αυτή είναι ισομετρία στην νόρμα του ℓ^2. Επομένως επεκτείνεται σε μια ισομετρία $\lambda_s : \ell^2(G) \to \ell^2(G)$. Η λ_s είναι και επί, συνεπώς unitary. Παρατηρούμε ότι

$$\text{Αν } \; f \in \ell^2(G), \quad (\lambda_s f)(t) = f(s^{-1}t).$$

Η απεικόνιση $s \mapsto \lambda_s : G \to \mathcal{B}(\ell^2 G)$ λέγεται η αριστερή κανονική αναπαράσταση (left regular representation) της G στον $\ell^2(G)$.

Η άλγεβρα von Neumann μιας ομάδας

Ορισμός

Συμβολίζουμε $\mathrm{vN}(G)$ ή $\mathcal{L}(G)$ την sot-κλειστή γραμμική θήκη της ομάδας των unitary τελεστών $\{\lambda_t : t \in G\}$, δηλαδή

$$\mathcal{L}(G) := \overline{\mathrm{span}\{\lambda_t : t \in G\}}^{\mathrm{sot}} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(G))\,.$$

Η $\mathcal{L}(G)$ ονομάζεται η άλγεβρα von Neumann της ομάδας.

Παράδειγμα

Αν $\mathbb{F}_n$: η ελεύθερη ομάδα με n γεννήτορες, είναι άγνωστο αν $\mathcal{L}(\mathbb{F}_n) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{F}_m)$ για $n > m \geq 2$.