Ο συναρτησιακός λογισμός για συνεχείς συναρτήσεις

Σταθεροποιούμε έναν $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Αν p είναι ένα πολυώνυμο, $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$ ($c_k \in \mathbb{C}$), θέτουμε $p(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k$ (όπου $A^0 = I$).

Στόχος: να ορίσουμε τελεστές της μορφής $f(A)$ για άλλες κλάσεις συναρτήσεων f.

Ορισμός 1. Άλγεβρα Banach *είναι ένας χώρος Banach* $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ *που είναι και άλγεβρα με την ιδιότητα* $\|ab\| \leqslant \|a\| \, \|b\|$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$.

C*-άλγεβρα *είναι μια άλγεβρα Banach* $\mathcal{A}$ *εφοδιασμένη με μια ενέλιξη* $\mathcal{A} \to \mathcal{A} : a \to a^*$ *που η νόρμα της ικανοποιεί την λεγόμενη* ιδιότητα C**:* $\|a^* a\| = \|a\|^2$.

Αν H είναι χώρος Hilbert, η $\mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα. Μια $\|\cdot\|$-κλειστή υπάλγεβρα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ είναι C*-άλγεβρα ανν είναι *αυτοσυζυγής (selfadjoint)*, δηλ. αν ικανοποιεί $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^* \in \mathcal{A}$.

Γενικότερα, έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Ορίζουμε πάλι $p(a) = \sum_{k=0}^{n} c_k a^k$,

Παρατήρηση. Η απεικόνιση $\Phi_\pi : p \to p(a)$ διατηρεί το άθροισμα $+$ και το γινόμενο $\cdot$.

Λήμμα 1 (φασματικής απεικόνισης)**.** *Έστω $\mathcal{A}$ μιγαδική άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$. Αν p είναι πολυώνυμο,*

$$\sigma(p(a)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\} .$$

Απόδειξη Αν το p είναι σταθερό, το συμπέρασμα είναι άμεσο. Υποθέτουμε τώρα ότι το p δεν είναι σταθερό. Αν $\mu \in \mathbb{C}$ θέτω $q(\lambda) = p(\lambda) - \mu \quad (\lambda \in \mathbb{C})$. Από το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, το πολυώνυμο q παραγοντοποιείται

$$q(\lambda) = c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ οι ρίζες του q και $c \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Επομένως

$$q(a) = c(a - \lambda_1 \mathbf{1})(a - \lambda_2 \mathbf{1}) \dots (a - \lambda_n \mathbf{1}) \in \mathcal{A} .$$

Παρατήρησε ότι, επειδή οι παράγοντες $a - \lambda_i \mathbf{1}$ μετατίθενται μεταξύ τους, το γινόμενό τους έχει αντίστροφο αν και μόνον αν καθένας έχει αντίστροφο. [1] Άρα η σχέση $\mu \notin \sigma(p(a))$, δηλαδή $q(a) = p(a) - \mu \mathbf{1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, ισοδυναμεί με την $a - \lambda_i \mathbf{1} \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, δηλαδή $\lambda_i \notin \sigma(a)$, για κάθε $i = 1, \dots n$. Επομένως $\mu \notin \sigma(p(a))$ αν και μόνον αν $\lambda \neq \lambda_i$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$, δηλαδή $q(\lambda) \neq 0$, ισοδύναμα $p(\lambda) \neq \mu$ για κάθε $\lambda \in \sigma(a)$. $\square$

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$.*

$$a = a^* \implies \sigma(a) \subseteq \mathbb{R} .$$

Απόδειξη Έστω $\lambda + i\mu \in \sigma(a)$ όπου $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Δείχνουμε ότι $\mu = 0$. Αν $\mu \neq 0$, το στοιχείο $a - (\lambda + i\mu)\mathbf{1} = \mu(\frac{a - \lambda \mathbf{1}}{\mu} - i\mathbf{1})$ της $\mathcal{A}$ δεν είναι αντιστρέψιμο. Έπεται ότι, αν γράψουμε $b := \frac{a - \lambda \mathbf{1}}{\mu} \in \mathcal{A}$ θα έχουμε $b = b^*$ και $i \in \sigma(b)$. Αυτό δεν μπορεί να συμβεί, για τον εξής λόγο:

Αν $i \in \sigma(b)$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το $(n\mathbf{1} - ib) - (n+1)\mathbf{1} = -i(b - i\mathbf{1})$ δεν είναι αντιστρέψιμο και συνεπώς $n + 1 \in \sigma(n\mathbf{1} - ib)$. Έπεται ότι $|n + 1| \leqslant \|n\mathbf{1} - ib\|$ και άρα

$$(n+1)^2 \leqslant \|n\mathbf{1} - ib\|^2 \overset{(C^*)}{=} \|(n\mathbf{1} - ib)^*(n\mathbf{1} - ib)\| \overset{(b=b^*)}{=} \|(n\mathbf{1} + ib)(n\mathbf{1} - ib)\| = \left\|n^2\mathbf{1} + b^2\right\| \leqslant n^2 + \left\|b^2\right\| .$$

Επομένως έχουμε $2n + 1 \leqslant \left\|b^2\right\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άτοπο. $\square$

[1] Το $q(a)$ μπορεί να γραφεί $q(a) = (a - \lambda_k \mathbf{1}) b_k = b_k (a - \lambda_k \mathbf{1})$ για κάποιο $b_k \in \mathcal{A}$. Πολλαπλασιάζοντας δεξιά και αριστερά με $(q(a))^{-1}$, συμπεραίνουμε ότι το $a - \lambda_k \mathbf{1}$ έχει αριστερό και δεξί αντίστροφο, άρα είναι αντιστρέψιμο.

Λήμμα 3. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα. Αν $a \in \mathcal{A}$ είναι φυσιολογικό (δηλ. $aa^* = a^*a$ τότε*

$$\|a\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}\,.$$

Απόδειξη Από τον τύπο Gelfand-Beurling γνωρίζουμε ότι

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n}.$$

Επειδή το a είναι φυσιολογικό,

$$\|a\|^4 \overset{(C^*)}{=} \|a^*a\|^2 \overset{(C^*)}{=} \|(a^*a)^*(a^*a)\| \overset{(N)}{=} \left\|(a^*)^2a^2\right\| = \left\|(a^2)^*(a^2)\right\| \overset{(C^*)}{=} \left\|a^2\right\|^2$$

(η υπόθεση $a^*a = aa^*$ χρησιμοποιήθηκε στη σχέση (N)), συνεπώς $\|a\|^2 = \left\|a^2\right\|$.

Με επαγωγή βρίσκουμε ότι $\|a\|^{2^m} = \left\|a^{2^m}\right\|$, άρα $\|a\| = \left\|a^{2^m}\right\|^{1/2^m}$ για κάθε m, και συνεπώς

$$\lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_m \left\|a^{2^m}\right\|^{1/2^m} = \|a\|\,.$$

□

Θεώρημα 4. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα. Αν $a \in \mathcal{A}$ και $a = a^*$ τότε, για κάθε πολυώνυμο p, η νόρμα του $p(a) \in \mathcal{A}$ είναι*

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} := \|p\|_{\sigma(a)}\,.$$

Απόδειξη Παρατηρούμε ότι το $p(a)$ είναι φυσιολογικό: πράγματι, αφού $a = a^*$ έχουμε ότι και το $p(a)^* = \sum_{k=0}^n \bar{c}_k a^k$ είναι πολυώνυμο του a, άρα προφανώς μετατίθεται με το $p(a)$. Έχουμε όμως δείξει ότι, για φυσιολογικά στοιχεία, η νόρμα και η φασματική ακτίνα είναι ίσες, οπότε

$$\|p(a)\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(p(a))\}\,.$$

Αλλά από το Λήμμα Φασματικής Απεικόνισης ξέρουμε ότι $\mu \in \sigma(p(a))$ αν και μόνον αν $\mu = p(\lambda)$ για κάποιο $\lambda \in \sigma(a)$. Συνεπώς η προηγούμενη ισότητα γίνεται

$$\|p(a)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\}\,.$$

□

Θα επεκτείνουμε την απεικόνιση $p \to p(a)$ από τα πολυώνυμα στις συνεχείς συναρτήσεις. Ας θυμηθούμε ότι η υπάλγεβρα $\mathcal{P}(\sigma(a)) \subseteq C(\sigma(a))$ των *πολυωνυμικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το* $\sigma(a)$ είναι πυκνή στην άλγεβρα $C(\sigma(a))$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$ ως προς την νόρμα supremum. Αυτό έπεται είτε απευθείας από το Θεώρημα Stone-Weierstrass, είτε απ' το βασικό Θεώρημα Weierstrass, αν παρατηρήσει κανείς ότι κάθε συνεχής συνάρτηση $f : \sigma(a) \to \mathbb{C}$, επεκτείνεται με την ίδια νόρμα σε μια συνεχή συνάρτηση ορισμένη στο $[-\|a\|, \|a\|]$, η οποία προσεγγίζεται από πολυώνυμα, ομοιόμορφα στο $[-\|a\|, \|a\|]$, άρα και στο $\sigma(a)$.

Θεώρημα 5 (Συναρτησιακός λογισμός (functional calculus))**.**
Έστω $\mathcal{A}$ μια C άλγεβρα με μονάδα και $a \in \mathcal{A}$ με $a = a^*$. Υπάρχει μοναδικός ισομετρικός αλγεβρικός *-μορφισμός*

$$\Phi_c : (C(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : f \to f(a)$$

που απεικονίζει το σταθερό πολυώνυμο $p_0(t) = 1$ στη μονάδα της $\mathcal{A}$ και το ταυτοτικό πολυώνυμο $p_1(t) = t$ στο $a \in \mathcal{A}$.

Επίσης, ισχύει η ισότητα $\Phi_c(p) = p(a)$ για κάθε πολυώνυμο p.

Απόδειξη. Ύπαρξη: Από το προηγούμενο Θεώρημα έπεται ότι αν δύο πολυώνυμα p, q ταυτίζονται στο $\sigma(a)$, τότε $p(a) = q(a)$ (πράγματι, $\|p(a) - q(a)\| = \sup\{|p(\lambda) - q(\lambda)| : \lambda \in \sigma(a)\} = 0$). Επομένως το $p(a)$ εξαρτάται μόνον από τις τιμές του p στο $\sigma(a)$. Δηλαδή η απεικόνιση

$$\Phi_o : \ (\mathcal{P}(\sigma(a)), \|\cdot\|_{\sigma(a)}) \to (\mathcal{A}, \|\cdot\|) : \quad p \to p(a)$$

είναι καλά ορισμένη. Είναι φανερό ότι είναι μορφισμός αλγεβρών:

$$(p+q)(a) = p(a) + q(a) \quad \text{και} \quad (pq)(a) = p(a)q(a)$$

όταν τα p και q είναι πολυώνυμα, και ότι διατηρεί την ενέλιξη:
Αν $p(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k t^k$, τότε

$$(p(a))^* = \left(\sum_{k=0}^{n} c_k a^k\right)^* = \sum_{k=0}^{n} \bar{c}_k a^k = \bar{p}(a)$$

(αφού $a = a^*$). Αλλά από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε $\|\Phi_o(p)\| = \|p(a)\| = \|p\|_{\sigma(a)}$ για κάθε πολυώνυμο p, δηλαδή η Φ_o είναι γραμμική ισομετρία χώρων με νόρμα. Εφόσον η $\mathcal{P}(\sigma(a))$ είναι πυκνή στην $C(\sigma(a))$, έπεται ότι η Φ_o έχει μοναδική συνεχή επέκταση (η οποία θα είναι ισομετρική) $\Phi_c : C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$.

Από τη συνέχεια της ενέλιξης και του γινομένου έπεται ότι η Φ_c είναι *-μορφισμός: αν $f, g \in C(\sigma(a))$ και (p_n), (q_n) είναι ακολουθίες πολυωνύμων με $\|f - p_n\|_{\sigma(a)} \to 0$ και $\|g - q_n\|_{\sigma(a)} \to 0$, τότε $\|fg - p_n q_n\|_{\sigma(a)} \to 0$, άρα, εφόσον $(p_n q_n)(a) = p_n(a) q_n(a)$,

$$\begin{aligned} (fg)(a) &= \lim_n (p_n q_n)(a) = \lim_n p_n(a) \lim_n q_n(a) = f(a)g(a) \\ \text{και} \quad (f(a))^* &= \lim_n (p_n(a))^* = \lim_n \bar{p}_n(a) = \bar{f}(a)\,. \end{aligned}$$

Μοναδικότητα: Αν Ψ είναι ένας συνεχής μορφισμός $C(\sigma(a)) \to \mathcal{A}$ που ταυτίζεται με την Φ_c στα p_0 και p_1 τότε, αφού και οι δύο είναι μορφισμοί, θα ταυτίζονται σε δυνάμεις και γραμμικούς συνδυασμούς, δηλαδή σε κάθε πολυώνυμο. Εφόσον οι Φ_c και Ψ είναι (ομοιόμορφα) συνεχείς, θα ταυτίζονται και στα (ομοιόμορφα) όρια πολυωνύμων, δηλαδή σε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις. □

Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Είναι φανερό ότι, για κάθε πολυώνυμο p, ο τελεστής $p(A)$ μετατίθεται με τον A. Το ίδιο επομένως ισχύει και για τον $f(A)$, που είναι όριο πολυωνύμων του A αν $f \in C(\sigma(A))$.

Πιο ενδιαφέρον όμως, όπως θα δούμε, είναι το γεγονός ότι *ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A*. Πράγματι, αν $AT = TA$ τότε $A^2T = ATA = TA^2$ και επαγωγικά $A^nT = TA^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επομένως $p(A)T = Tp(A)$ για κάθε πολυώνυμο p, άρα και $f(A)T = Tf(A)$ για κάθε $f \in C(\sigma(A))$, λόγω συνέχειας. Δείξαμε λοιπόν ότι

Παρατήρηση 6. *Αν $f \in C(\sigma(A))$, ο $f(A)$ μετατίθεται με κάθε τελεστή που μετατίθεται με τον A.*

Πρόταση 7 (Φασματικής Απεικόνισης)**.** *Αν $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής και $f \in C(\sigma(A))$, τότε*

$$\sigma(f(A)) = \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι ένας $\mu \in \mathbb{C}$ ανήκει στο $\sigma(f(A))$ αν και μόνον αν $\mu \in \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$. Ισοδύναμα να δείξουμε ότι

$$\text{Ο τελεστής } f(A) - \mu I \text{ είναι αντιστρέψιμος} \iff \mu \notin \{f(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Θέτοντας $g(t) - f(t) - \mu I$, να δείξουμε ότι

$$\text{Ο τελεστής } g(A) \text{ είναι αντιστρέψιμος} \iff g(\lambda) \neq 0 \; \forall \lambda \in \sigma(A)\}.$$

($\Leftarrow$) Αν η g δεν μηδενίζεται πουθενά στο $\sigma(A)$, η συνάρτηση $h(t) := \frac{1}{g(t)}$ ορίζεται και είναι συνεχής στο $\sigma(A)$. Επειδή $hg = gh = \mathbf{1}$, από τον συναρτησιακό λογισμό έχουμε $h(A)g(A) = \Phi_c(h)\Phi_c(g) = \Phi_c(hg) = \Phi_c(\mathbf{1}) = I$ και ομοίως $g(A)h(A) = \Phi_c(gh) = \Phi_c(\mathbf{1}) = I$. Άρα ο $g(A)$ είναι αντιστρέψιμος (με αντίστροφο τον $h(A)$).

($\Rightarrow$) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda_0 \in \sigma(A)$ με $g(\lambda_0) = 0$ και θα δείξουμε ότι ο $g(A)$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

Υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων (q_n) που συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$ και επιπλέον ικανοποιεί $q_n(\lambda_0) = 0$ για κάθε n: Πράγματι, αρκεί να θεωρήσουμε οποιαδήποτε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) που συγκλίνει στην g ομοιόμορφα στο $\sigma(A)$ και να θέσουμε $q_n := p_n - p_n(\lambda_0)\mathbf{1}$ (οπότε θα έχουμε $\|q_n - g\|_{\sigma(A)} = \|p_n - g - p_n(\lambda_0)\mathbf{1}\|_{\sigma(A)} \leqslant \|p_n - g\|_{\sigma(A)} + |p_n(\lambda_0)| \to 0 + |g(\lambda_0)| = 0$).

Έπεται λοιπόν ότι $\|q_n(A) - g(A)\| = \|q_n - g\|_{\sigma(A)} \to 0$. Αν ο $g(A)$ ήταν αντιστρέψιμος, θα είχαμε $\left\|g(A)^{-1}q_n(A) - I\right\| = \left\|g(A)^{-1}(q_n(A) - g(A))\right\| \leqslant \left\|g(A)^{-1}\right\| \|q_n(A) - g(A)\| \to 0$. Θα υπήρχε λοιπόν $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\left\|g(A)^{-1}q_n(A) - I\right\| < 1$. Τότε όμως ο τελεστής $B := g(A)^{-1}q_n(A)$ είναι αντιστρέψιμος,[2] οπότε και ο $q_n(A)$ θα ήταν αντιστρέψιμος. Όμως από το Λήμμα 1 έχουμε $\sigma(q_n(A)) = q_n(\sigma(A))$ το οποίο περιέχει το 0 επειδή $q_n(\lambda_0) = 0$. Δεν μπορεί λοιπόν ο $q_n(A)$ να είναι αντιστρέψιμος. □

Πόρισμα 8. *Έστω $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$ και $f : \sigma(A) \to \mathbb{C}$ συνεχής.*

- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι πάντα φυσιολογικός.*
- *Ο τελεστής $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής αν και μόνον αν $f(\sigma(A)) \subseteq \mathbb{R}$.*

Απόδειξη Αν $f = \lim_n p_n$ όπου p_n πολυώνυμα, επειδή κάθε $p_n(A)$ είναι φυσιολογικός τελεστής (γραμμικός συνδυασμός αυτοσυζυγών), έπεται ότι ο $f(A)$ είναι φυσιολογικός.

Αν τώρα η f παίρνει πραγματικές τιμές στο $\sigma(A)$, τότε $\lim_n \bar{p}_n = \bar{f} = f$ και συνεπώς $f = \lim_n q_n$ όπου $q_n = \frac{1}{2}(p_n + \bar{p}_n)$ είναι πραγματικό πολυώνυμο, οπότε ο $q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής, άρα και ο $f(A) = \lim_n q_n(A)$ είναι αυτοσυζυγής.

Αντίστροφα αν ο $f(A)$ είναι αυτοσυζυγής, από την προγούμενη Πρόταση έχουμε ότι
$f(\sigma(A)) = \sigma(f(A) \subseteq \mathbb{R}$. □

[2] Πράγματι, επειδή $\sum_k \|(I-B)^k\| \leqslant \sum_k \|I-B\|^k < \infty$, η σειρά $\sum_k (I-B)^k$ συγκλίνει, και αν $C = \sum_{k=0}^{\infty}(I-B)^k$, εύκολα βλέπουμε ότι $CB = BC = I$.