

Καλώς ήρθατε στη Θεωρία Τελεστών!

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/>

<http://eclass.uoa.gr/courses/MATH175/>

Χειμερινό Εξάμηνο 2021-22

Sesquilinear μορφές

Έστω H_1 και H_2 δύο μιγαδικοί γραμμικοί χώροι.¹

Ορισμός

Μια απεικόνιση $\phi : H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ λέγεται **sesquilinear μορφή** αν έχει τις ιδιότητες

(i) είναι γραμμική ως προς την πρώτη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $y \in H_2$ η απεικόνιση $x \rightarrow \phi(x, y) : H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

(ii) είναι αντιγραμμική ως προς την δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή για κάθε $x \in H_1$ η απεικόνιση $y \rightarrow \overline{\phi(x, y)} : H_2 \rightarrow \mathbb{C}$ είναι γραμμική.

Όταν $H_1 = H_2 = H$:

η ϕ λέγεται **Ερμιτιανή ή συμμετρική** αν $\phi(y, x) = \overline{\phi(x, y)} \forall x, y \in H$ και **θετικά ημιορισμένη ή θετική ή ημιεσωτερικό γινόμενο** αν (επιπλέον) $\phi(x, x) \geq 0 \forall x \in H$.

H ϕ λέγεται **εσωτερικό γινόμενο** αν επιπλέον $\phi(x, x) > 0 \forall x \neq 0$.

Παρατήρηση Θετικά ημιορισμένη $\Rightarrow$ ερμιτιανή σε μιγαδικούς χώρους.

Αποδ. Έπεται από την ταυτότητα πολικότητας:

¹Οι γραμμικοί χώροι θα είναι πάντα μιγαδικοί, εκτός αν ρητά αναφέρεται κάτι διαφορετικό.

Ταυτότητα πολικότητας (polarization) Αν $\varphi : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ sesquilinear και $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, x)$ η αντίστοιχη **τετραγωνική μορφή**,

$$\varphi(x, y) = \hat{\varphi}\left(\frac{x+y}{2}\right) - \hat{\varphi}\left(\frac{x-y}{2}\right) + i\hat{\varphi}\left(\frac{x+iy}{2}\right) - i\hat{\varphi}\left(\frac{x-iy}{2}\right).$$

Πρόταση (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)

Αν ϕ θετικά ημιορισμένη, για κάθε $x, y \in H$ ισχύει

$$|\phi(x, y)|^2 \leq \phi(x, x)\phi(y, y).$$

Παραδείγματα - Ασκήσεις (α) $E = M_n(\mathbb{C})$: Έστω $a \in M_n(\mathbb{C})$. Θέτω $\phi_a(x, y) = \text{Tr}(axy^*)$, $x, y \in E$.

(β) $E = C_c(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ συνεχής με συμπαγή φορέα}\}$: Έστω $f_0 \in C(\mathbb{R})$. Θέτω $\phi_0(h, k) = \int f_0(t)h(t)\overline{k(t)}$, $h, k \in E$.

Ειδικότερα,

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$,

(a) για κάθε $x, y \in E$ ισχύει

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}.$$

(b) Ισότητα ισχύει αν και μόνον αν τα x, y είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Πρόταση

Αν E είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο, η απεικόνιση

$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ όπου $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ είναι νόρμα στον E .

■ $\|x\| = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$,

■ $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ και

■ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική ανισότητα).

για κάθε $x, y \in E$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Γραμμικοί χώροι με νόρμα

Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι χώρος με νόρμα και $x_n, x \in X$, τότε $x_n \rightarrow x$ σημαίνει $\|x_n - x\| \rightarrow 0$.

Παρατήρηση Πολύ συχνά στις εφαρμογές, η νόρμα (ή η μετρική) προσδιορίζεται από την σύγκλιση που μελετάμε.

Για παράδειγμα, η σύγκλιση ως προς τη νόρμα supremum στον $C([a, b])$ εκφράζει την **ομοιόμορφη σύγκλιση** μιας ακολουθίας (f_n) συνεχών συναρτήσεων:

$$\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow f \text{ ομοιόμορφα στο } [a, b].$$

[Ενώ η σημειακή σύγκλιση δεν περιγράφεται εν γένει με νόρμα.]

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Επομένως κάθε $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ γίνεται μετρικός χώρος (E, d) με

$$d(x, y) := \|x - y\| = \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}, \quad x, y \in E$$

στον οποίο οι γραμμικές πράξεις

$$+ : (E, d) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : (\mathbb{K}, |\cdot|) \times (E, d) \rightarrow (E, d) : (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$$

είναι συνεχείς. Επίσης η απεικόνιση

$$(E, d) \times (E, d) \rightarrow (\mathbb{K}, |\cdot|) : (x, y) \rightarrow \langle x, y \rangle$$

είναι συνεχής.

Ορισμός

Ένας χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο λέγεται **χώρος Hilbert** αν είναι πλήρης **ως προς την μετρική που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο**.

Παραδείγματα (a) Ο χώρος $\mathbb{K}^n$, εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x(k) \overline{y(k)}$, είναι βέβαια χώρος Hilbert.

Είναι επίσης πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$, αλλά **δεν είναι** χώρος Hilbert ως προς αυτήν (γιατί δεν ικανοποιείται ο κανόνας του παραλληλογράμμου), μολονότι οι δυο νόρμες είναι ισοδύναμες.

(b) Κάθε χώρος $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ με εσωτερικό γινόμενο και $\dim E < \infty$ είναι χώρος Hilbert.

(c) Ο χώρος ℓ^2 , με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \overline{y(k)}$, είναι χώρος Hilbert, και ο χώρος c_{oo} των

ακολουθιών με πεπερασμένο φορέα είναι πυκνός υπόχωρος του.

Επομένως ο χώρος $(c_{oo}, \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος με εσωτερικό γινόμενο αλλά **όχι** Hilbert, εφόσον δεν είναι πλήρης.

(d) Ο χώρος $C([a, b])$ **δεν είναι** πλήρης ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζει το εσωτερικό γινόμενο.

Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Πρόταση

(α) (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

$$\text{για κάθε } x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

(β) (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\text{αν } x, y \in E \text{ και } \langle x, y \rangle = 0, \text{ τότε } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Ορισμός

Δύο στοιχεία x, y ενός χώρου E με εσωτερικό γινόμενο λέγονται **κάθετα** (συμβολικά $x \perp y$) όταν $\langle x, y \rangle = 0$.

Μια οικογένεια $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ λέγεται **ορθοκανονική (orthonormal)** αν $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j \in I$.

Ορισμός

Μια ορθοκανονική οικογένεια $\mathcal{E} := \{e_i : i \in I\}$ σε έναν χώρο Hilbert H λέγεται **ορθοκανονική βάση του H** αν είναι μεγιστική Ο.Κ. οικογένεια, δηλ. αν κάθε Ο.Κ. οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq H$ με $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{F}$ ικανοποιεί $\mathcal{F} = \mathcal{E}$.

(Ισοδύναμα, αν το μόνο $x \in H$ που είναι κάθετο σε κάθε e_i είναι το 0.)
Κάθε χώρος Hilbert έχει ορθοκανονικές βάσεις (πληρότητα!).

Πρόταση (Ανισότητα Bessel)

Αν $\{e_i : i = 1, \dots, n\} \subseteq E$ είναι (πεπερασμένη) ορθοκανονική οικογένεια και $x \in E$ (E χώρος με εσωτερικό γινόμενο) τότε:

$$(i) \sum_{k=1}^n |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

(ii) Στην (i) ισχύει ισότητα αν και μόνον αν $x \in \text{span}\{e_i : i = 1, \dots, n\}$.

(Η Cauchy-Schwarz είναι πόρισμα της Bessel.)

Πρόταση (Γενικευμένη ανισότητα Bessel)

Αν $\{e_i : i \in I\} \subseteq E$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και $x \in E$, τότε

$$\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Ορισμός: $\sum_{i \in I} |\langle x, e_i \rangle|^2 := \sup\{\sum_{j \in J} |\langle x, e_j \rangle|^2 : J \subset I \text{ πεπ.}\}.$

Θεώρημα

Έστω $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική *βάση* σ' έναν χώρο Hilbert H . Τότε, για κάθε $x \in H$,

$$(i) \ x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n \text{ (σύνγκλιση ως προς τη νόρμα του } H).$$

$$(ii) \ \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \text{ (Ισότητα Parseval)}.$$

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο Hilbert H , για κάθε $x, y \in H$ έχουμε

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Πόρισμα

Αν $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι ορθοκανονική βάση σ' έναν χώρο Hilbert H , η απεικόνιση $x \rightarrow (\langle x, e_n \rangle)_n$ είναι γραμμική ισομετρία από τον $(H, \|\cdot\|)$ στον $\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2$, και είναι επί (πληρότητα του H).

Υπόχωρος, κάθετος υπόχωρος, χώρος πηλίκου

Έστω H χώρος Hilbert.

- Ένας γραμμικός υπόχωρος $M \subseteq H$ είναι χώρος Hilbert ως προς το εσωτ. γινόμενο του H ανν είναι κλειστός, δηλ. $\overline{M} = M$.
- Αν A είναι μη κενό υποσύνολο του H , ορίζω

$$A^\perp := \{x \in H : \langle x, a \rangle = 0 \ \forall a \in A\}.$$

Ο $A^\perp$ είναι πάντα κλειστός υπόχωρος του H .

- Αν $M \subseteq H$ είναι **κλειστός γραμμικός υπόχωρος**, κάθε $x \in H$ γράφεται μοναδικά $x = x_M + x_\perp$, όπου $x_M \in M$ και $x_\perp \in M^\perp$. Δηλαδή $H = M + M^\perp$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$.
- Αν $M \subseteq H$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος, στον χώρο πηλίκου

$$H/M := \{[x]_M : x \in H\} \text{ όπου } [x]_M := x + M := \{x + y : y \in M\} \subseteq H$$

θέτουμε $\|[x]_M\|_{H/M} := \inf\{\|x - y\|_H : y \in M\} = \text{dist}(x, M)$.

Η $\|\cdot\|_{H/M}$ είναι πλήρης νόρμα και ο H/M είναι χώρος Hilbert (δες αργότερα).

Πηλίκo μέσω ημiesωτερικού γινόμενου

Έστω (E, ϕ) γραμμικός χώρος εφοδιασμένος με μια θετικά ημιορισμένη μορφή (ένα ημiesωτερικό γινόμενο)

Τότε

$$\bullet \{x \in E : \phi(x, x) = 0\} = \{x \in E : \phi(x, y) = 0 \ \forall y \in E\} := N$$

Άρα ο N είναι γραμμικός υπόχωρος του E .

• Στο πηλίκo E/N ορίζεται καλά εσωτερικό γινόμενο από τον τύπο:

$$\langle [x]_N, [y]_N \rangle := \phi(x, y), \quad x, y \in E.$$

Επομένως η **πλήρωση** H_ϕ του E/N ως προς την επαγόμενη νόρμα

$\|[x]_N\| = \sqrt{\phi(x, x)}$ είναι χώρος Hilbert.

Παράδειγμα Αν $E = C([0, 1])$ και $\phi(f, g) = \int_0^{1/2} f(t)\bar{g}(t)dt$,
αποδεικνύεται ότι $H_\phi \simeq L^2([\frac{1}{2}, 1])$.

Αν H_1, H_2, H είναι χώροι Hilbert, θέτουμε

$$H_1 \oplus H_2 = \{(x, y) : x \in H_1, y \in H_2\}, \quad \|(x, y)\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}.$$

είναι χώρος Hilbert.

$$H^{(\infty)} := \{x := (x(n)) : x_n \in H : \sum_n \|x(n)\|_H^2 < \infty\},$$

$$\|x\| := \sqrt{\sum_n \|x(n)\|_H^2}$$

είναι χώρος Hilbert.

Παρατήρηση Αν $M \subseteq H$ είναι κλειστός υπόχωρος του H , είδαμε ότι $H = M + M^\perp$ και $M \cap M^\perp = \{0\}$. Ο H είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $M \oplus M^\perp$ μέσω της απεικόνισης

$$M \oplus M^\perp \rightarrow H : (x, y) \mapsto x + y.$$

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

(Περισσότερα και αποδείξεις στο [tanginom3.pdf](#).)

Έστω E, F γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$.

Ορισμός

Τανυστικό γινόμενο των E και F ονομάζεται ένα ζεύγος (M, ϕ) , όπου M ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$ και $\phi : E \times F \rightarrow M$ μια διγραμμική απεικόνιση που ικανοποιούν τα εξής:

- 1** $M = \text{span}\{\phi(x, y) : x \in E, y \in F\}$
- 2** Έστω $\{x_i : i \in I\} \subseteq E$ και $\{y_j : j \in J\} \subseteq F$ δύο γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα, τότε και το $\{\phi(x_i, y_j) : i \in I, j \in J\} \subseteq M$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεώρημα (Υπαρξη)

Αν E και F δύο γραμμικοί χώροι πάνω από το $\mathbb{K}$, τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα τανυστικό γινόμενο των E και F .

Θεώρημα (Μοναδικότητα)

Αν (M_1, ϕ_1) και (M_2, ϕ_2) δύο τανυστικά γινόμενα των γραμμικών χώρων E και F τότε, υπάρχει γραμμικός ισομορφισμός $\pi : M_1 \rightarrow M_2$ ώστε $\pi \circ \phi_1 = \phi_2$.

Έπεται από την

Θεώρημα (Καθολική Ιδιότητα)

Έστω E, F δύο $\mathbb{K}$ -γραμμικοί χώροι και (M, ϕ) ένα τανυστικό τους γινόμενο. Για κάθε $\mathbb{K}$ -γραμμικό χώρο G και κάθε διγραμμική απεικόνιση $b : E \times F \rightarrow G$, υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $B : M \rightarrow G$ τέτοια ώστε $B(\phi(x, y)) = b(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in E \times F$.

Τανυστικά γινόμενα [Α. Χατζηνικολάου]

Στο εξής συμβολίζουμε το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο M δύο γραμμικών χώρων E και F με $E \otimes F$ και τη διγραμμική απεικόνιση $\phi : E \times F \rightarrow E \otimes F$ με

$$(x, y) \mapsto x \otimes y.$$

Δηλαδή, το τανυστικό γινόμενο των χώρων E και F , είναι ένας γραμμικός χώρος $E \otimes F$ της μορφής

$$E \otimes F = \text{span}\{x \otimes y : x \in E, y \in F\}$$

και κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ σε αυτόν τον χώρο έχει μια αναπαράσταση (όχι μοναδική) της μορφής

$$u = \sum_{i=1}^k x_i \otimes y_i$$

όπου $x_i \in E$ και $y_i \in F$ για κάθε $i = 1, \dots, k$. Κάθε στοιχείο της μορφής $x \otimes y$ ονομάζεται *στοιχειώδης τανυστής* (elementary tensor) ή *απλός τανυστής* (simple tensor).

Πρόταση

Κάθε στοιχείο $u \in E \otimes F$ μπορεί να γραφτεί ως ένα άθροισμα $u = \sum_i e_i \otimes f_i$ ώστε τα $\{f_i\} \subseteq F$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητα και τότε τα $\{e_i\} \subseteq E$ καθορίζονται μοναδικά από τα f_i .

Τανυστικά γινόμενα χώρων Hilbert [Α. Χατζηνικολάου]

Ορισμός

Έστω H, K χώροι Hilbert. Στον χώρο $H \otimes K$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\left\langle \sum_i x_i \otimes z_i, \sum_j y_j \otimes w_j \right\rangle_{hs} := \sum_{i,j} \langle x_i, y_j \rangle_H \langle z_i, w_j \rangle_K.$$

Δηλαδή, αν $h_i \otimes k_i \in H \otimes K, i = 1, 2$ έχουμε

$$\langle h_1 \otimes k_1, h_2 \otimes k_2 \rangle_{hs} = \langle h_1, h_2 \rangle_H \langle k_1, k_2 \rangle_K.$$

Πρόταση

H απεικόνιση $\langle \cdot, \cdot \rangle_{hs} : (H \otimes K) \times (H \otimes K) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ένα καλά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $H \otimes K$.²

Ορισμός

Ονομάζουμε $H \otimes_{hs} K$ την πλήρωση του χώρου $(H \otimes K, \|\cdot\|_{hs})$ όπου $\|\cdot\|_{hs} := \langle \cdot, \cdot \rangle_{hs}^{\frac{1}{2}}$ η επαγόμενη νόρμα.

²Όταν οι H και K είναι απειροδιάστατοι χώροι Hilbert, το $H \otimes K$ δεν είναι πλήρης χώρος.