

Προκαταρκτικά απ' την Τοπολογία /Πραγματική Ανάλυση.

Λήμμα 1. Έστω X φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος (πχ. συμπαγής Hausdorff ή συμπαγής μετρικός). Αν U_1, U_2 είναι ανοικτά σύνολα με $U_1 \cup U_2 = X$, τότε υπάρχει V_1 ανοικτό ώστε $V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$ και $V_1 \cup U_2 = X$.

Απόδειξη. Έστω $F_1 = U_2^c, F_2 = U_1^c$. Είναι κλειστά σύνολα και $F_2 \cap F_1 = \emptyset$.

Αφού ο X είναι φυσιολογικός, υπάρχουν ανοικτά $V_i \supseteq F_i$ με $V_2 \cap V_1 = \emptyset$. (Στην περίπτωση που ο X είναι συμπαγής μετρικός έχουμε $\text{dist}(F_1, F_2) := \delta > 0$ και μπορούμε να θέσουμε $V_i = \{x \mid d(x, F_i) < \delta/2\}$.)

Τώρα, αφού $F_2 \subseteq V_2$ έχουμε $V_2^c \subseteq F_2^c$ οπότε

$$V_1 \subseteq V_2^c \subseteq F_2^c = U_1.$$

Αλλά το V_2^c είναι κλειστό, οπότε αφού $V_1 \subseteq V_2^c$ έχουμε $\bar{V}_1 \subseteq V_2^c$. Συνεπώς

$$V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1.$$

Τέλος, αν $x \notin U_2$ τότε $x \in U_2^c = F_1 \subseteq V_1$. Επομένως

$$V_1 \cup U_2 = X.$$

□

Πρόταση 2 (Shrinking Lemma). Έστω X φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος (πχ. συμπαγής Hausdorff ή σύμπαγής μετρικός). Αν $\{U_1, \dots, U_n\}$ είναι (πεπερασμένο) ανοικτό κάλυμμα του X , τότε υπάρχει ανοικτό κάλυμμα $\{V_1, \dots, V_n\}$ του X με $V_i \subseteq \bar{V}_i \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Απόδειξη. Θέτοντας $W_2 := U_2 \cup \dots \cup U_n$ έχουμε δύο two ανοικτά σύνολα U_1, W_2 με $U_1 \cup W_2 = X$. Από το Λήμμα, υπάρχει V_1 ανοικτό ώστε $V_1 \subseteq \bar{V}_1 \subseteq U_1$ και $V_1 \cup W_2 = X$. Επομένως το $\{V_1, U_2, \dots, U_n\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X .

Θέτουμε $W_3 := V_1 \cup U_3 \cup \dots \cup U_n$. Έχουμε δύο two ανοικτά σύνολα U_2, W_3 με $U_2 \cup W_3 = X$. Από το Λήμμα, υπάρχει V_2 ανοικτό ώστε $V_2 \subseteq \bar{V}_2 \subseteq U_2$ και $V_2 \cup W_3 = X$. Επομένως το $\{V_1, V_2, U_3, \dots, U_n\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του X .

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μετά από n βήματα έχουμε αντικαταστήσει όλα τα U_i με ανοικτά $V_i \subseteq \bar{V}_i \subseteq U_i$ και καταλήγουμε στο επιθυμητό ανοικτό κάλυμμα. □

Θεώρημα 3 (Διαμερίσεις της μονάδας). Έστω X φυσιολογικός (T_4) τοπολογικός χώρος (πχ. συμπαγής Hausdorff ή συμπαγής μετρικός) και $U_1, \dots, U_k$ ανοικτά υποσύνολα του X με $X = U_1 \cup \dots \cup U_k$. Τότε υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \rightarrow [0, 1]$, $i = 1, \dots, k$ με $\text{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$ και $\phi_1(x) + \dots + \phi_k(x) = 1$ για κάθε $x \in X$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα, υπάρχουν ανοικτά σύνολα V_i , $i = 1, \dots, k$ ώστε $\bar{V}_i \subseteq U_i$ και $X = \bigcup_{i=1}^k V_i$. Για τον ίδιο λόγο υπάρχουν ανοικτά σύνολα W_i , $i = 1, \dots, k$ ώστε $\bar{W}_i \subseteq V_i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$ και $X = \bigcup_{i=1}^k W_i$.

Από το Λήμμα Urysohn, για κάθε $i = 1, \dots, k$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_i : X \rightarrow [0, 1]$ ώστε $f_i(x) = 1$ όταν $x \in \bar{W}_i$ και $f_i(x) = 0$ όταν $x \notin V_i$. Παρατηρούμε ότι:

1. $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) > 0$ για κάθε $x \in X$, γιατί $X = W_1 \cup \dots \cup W_k$ οπότε $x \in W_i$ για κάποιο $i = 1, \dots, k$ άρα $f_i(x) = 1$.

¹Ευχαριστίες στους Μ.Μ. και Α.Χ.

2. $\text{supp}(f_i) \subseteq U_i$ για κάθε $i = 1, \dots, k$, γιατί αν το $x \in X$ ικανοποιεί $f_i(x) \neq 0$ τότε $x \in V_i$.
Επομένως,

$$\text{supp}(f_i) = \overline{\{x : f_i(x) \neq 0\}} \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i.$$

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ with $\phi_i = \frac{f_i}{f_1 + \dots + f_k}$. Είναι καλά ορισμένες και $\text{supp}(\phi_i) \subseteq U_i$ (εξηγήστε γιατί). Τέλος, $\sum_{i=1}^k \phi_i(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. $\square$

Ο χώρος / C* άλγεβρα $C(X, \mathcal{A})$. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff (π.χ. συμπαγής μετρικός) και $\mathcal{A}$ χώρος Banach. Ονομάζουμε $C(X, \mathcal{A})$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων $f : X \rightarrow \mathcal{A}$.

Για κάθε $f \in C(X, \mathcal{A})$ η συνάρτηση $X \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \|f(x)\|_{\mathcal{A}}$ είναι συνεχής σε συμπαγές, συνεπώς φραγμένη, άρα $\sup\{\|f(x)\|_{\mathcal{A}} : x \in X\} < \infty$. Εύκολα φαίνεται ότι η

$$f \mapsto \|f\|_{\mathcal{A}, \infty} := \sup\{\|f(x)\|_{\mathcal{A}} : x \in X\}$$

είναι νόρμα στον $C(X, \mathcal{A})$. Όπως στην Πραγματική Ανάλυση, αποδεικνύεται ότι ο $(C(X, \mathcal{A}), \|\cdot\|_{\mathcal{A}, \infty})$ είναι χώρος Banach: χρησιμοποιεί κανείς ότι μια ομοιόμορφα βασική ακολουθία, που παίρνει τιμές σε πλήρη μετρικό χώρο, συγκλίνει ομοιόμορφα, και ότι το ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.

Αν η $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα, εύκολα φαίνεται ότι η $C(X, \mathcal{A})$ γίνεται *-άλγεβρα με τις πράξεις κατά σημείο $((fg)(x) := f(x)g(x), f^*(x) := (f(x))^*)$ και ότι $\|fg\|_{\mathcal{A}, \infty} \leq \|f\|_{\mathcal{A}, \infty} \|g\|_{\mathcal{A}, \infty}$ και $\|f^* f\|_{\mathcal{A}, \infty} = \|f\|_{\mathcal{A}, \infty}^2$. Δηλαδή η $C(X, \mathcal{A})$ είναι τότε C*-άλγεβρα.

Θεώρημα 4. Υπάρχει μιά γραμμική και 1-1 απεικόνιση

$$\Phi : C(X) \otimes \mathcal{A} \rightarrow C(X, \mathcal{A}) \quad \text{με} \quad f \otimes a \mapsto f(\cdot)a.$$

Η εικόνα $\Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$ είναι πυκνή στον $C(X, \mathcal{A})$.

Απόδειξη. Η απεικόνιση

$$C(X) \times \mathcal{A} \rightarrow C(X, \mathcal{A}) : (f, a) \mapsto f(\cdot)a$$

(όπου $f(\cdot)a$ είναι η συνάρτηση $x \rightarrow \mathcal{A} : x \mapsto f(x)a$) είναι προφανώς διγραμμική, επομένως επάγει μια μοναδική γραμμική απεικόνιση

$$\Phi : C(X) \otimes \mathcal{A} \rightarrow C(X, \mathcal{A}) : f \otimes a \mapsto f(\cdot)a$$

από την καθολική ιδιότητα του (αλγεβρικού) τανυστικού γινομένου.

Ισχυρισμός: Η Φ είναι 1-1.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $u \in C(X) \otimes \mathcal{A}$ με $\Phi(u) = 0$. Δείχνουμε ότι $u = 0$:

Μπορούμε να γράψουμε το u στη μορφή $u = \sum_{k=1}^n f_k \otimes a_k$ με τα $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \mathcal{A}$ γραμμικά ανεξάρτητα.

Εφόσον $\Phi(u) = \sum_{k=1}^n f_k(\cdot)a_k = 0$, για κάθε $x \in X$ έχουμε $\sum_{k=1}^n f_k(x)a_k = 0$. Αλλά τα $\{a_1, \dots, a_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, επομένως οι συντελεστές $f_1(x), \dots, f_n(x)$ είναι όλοι μηδέν, για κάθε $x \in X$. Συνεπώς οι συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n$ μηδενίζονται όλες και άρα $u = \sum_{k=1}^n f_k \otimes a_k = 0$ όπως θέλαμε.

Ισχυρισμός: Η εικόνα $\Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$ είναι $\|\cdot\|_{\mathcal{A}, \infty}$ -πυκνή στον $C(X, \mathcal{A})$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έστω $F \in C(X, \mathcal{A})$. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την F με συναρτήσεις $G \in \Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$, δηλ. της μορφής $G = \sum_{k=1}^n g_k(\cdot)a_k$, όπου $g_k \in C(X)$ και $a_k \in \mathcal{A}$.

Έστω $\epsilon > 0$. Για κάθε $x \in X$, από τη συνέχεια της F στο x υπάρχει ανοικτή περιοχή V_x του x ώστε η F να είναι «σχεδόν σταθερή» στο V_x . Ακριβέστερα,

$$y \in V_x \Rightarrow \|F(y) - F(x)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon.$$

Η οικογένεια $\{V_x : x \in X\}$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς χώρου X , επομένως υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Γράφοντας $V_k := V_{x_k}$ και $a_k := F(x_k) \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$y \in V_k \Rightarrow \|F(y) - a_k\|_{\mathcal{A}} = \|F(y) - F(x_k)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon. \quad (*)$$

Έστω $\{g_1, \dots, g_n\}$ διαμέριση της μονάδας που αντιστοιχεί στο ανοικτό κάλυμμα $\{V_1, \dots, V_n\}$ (Θεώρημα 3): οι $g_k : X \rightarrow [0, 1]$, $k = 1, \dots, n$ είναι συνεχείς συναρτήσεις με $\text{supp}(g_k) \subseteq V_k$ για κάθε $k = 1, \dots, n$ και $g_1(x) + \dots + g_n(x) = 1$ για κάθε $x \in X$. Παρατηρούμε τότε ότι για κάθε $k \in [n]$,

$$\text{για κάθε } x \in X, \text{ αν } g_k(x) > 0 \text{ τότε } \|F(x) - a_k\|_{\mathcal{A}} < \epsilon. \quad (**)$$

Πράγματι, αν $g_k(x) > 0$ τότε $x \in V_k$ οπότε $\|F(x) - a_k\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$ από την (*).

Ισχυρισμός: Θέτουμε $G(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) a_k$. Για κάθε $x \in X$,

$$\|F(x) - G(x)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Για κάθε $x \in X$, εφόσον $\sum_{k=1}^n g_k(x) = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|F(x) - G(x)\|_{\mathcal{A}} &= \left\| \left(\sum_{k=1}^n g_k(x) \right) F(x) - \sum_{k=1}^n g_k(x) a_k \right\|_{\mathcal{A}} \\ &= \left\| \sum_{k=1}^n g_k(x) (F(x) - a_k) \right\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \sum_{k=1}^n g_k(x) \|F(x) - a_k\|_{\mathcal{A}} \\ &\leq \sum_{k=1}^n g_k(x) \epsilon < \epsilon \end{aligned}$$

από την (**).

Δείξαμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $G_\epsilon(x) = \sum_{k=1}^n g_k(x) a_k$ όπου $g_k \in C(X)$ και $a_k \in \mathcal{A}$, δηλαδή $G_\epsilon \in \Phi(C(X) \otimes \mathcal{A})$, ώστε $\|F - G_\epsilon\|_{\mathcal{A}, \infty} = \sup_{x \in X} \|F(x) - G_\epsilon(x)\|_{\mathcal{A}} < \epsilon$. $\square$