

Τελεστές ίχνους και κλάσεις Schatten

1 Σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Υπενθύμιση: Πίνακες και Τελεστές

Γράφουμε $M_{k,n} = M_{k,n}(\mathbb{C})$ για τους πίνακες με k γραμμές και n στήλες.

Κάθε $[a_{ij}]$ ορίζει τελεστή $A : \ell^2[n] \rightarrow \ell^2[k] : [x_1, \dots, x_n]^T \rightarrow [a_{ij}][x_j]^T$ και $a_{ij} = \langle Ae_j, e_i \rangle$.

Η απεικόνιση αυτή $M_{k,n} \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]) : [a_{ij}] \rightarrow A$ είναι 1-1 και επί και διατηρεί άθροισμα, γινόμενο και $*$ (όπου ο συζυγής είναι ο $[a_{ij}]^* := [\bar{a}_{ji}]$).

Δυισμός Ο γραμμ. χώρος $M_{k,n}$ εφοδιάζεται με ένα εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle := \text{Tr}(B^* A)$$

(εδώ αν $X : \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^k \xrightarrow{B^*} \mathbb{C}^n$, ορίζω $\text{Tr}(X) = \sum_{i=1}^k x_{ii}$ όπου $x_{ii} = \sum_{j=1}^n \bar{b}_{ji} a_{ij}$).

Παρατήρηση Η νόρμα $\|A\|_{hs} := \sqrt{\langle A, A \rangle}$ δεν είναι η νόρμα $\|\cdot\|_{op}$ του $\mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k])$.

Πίνακες και Δυισμός

Κάθε $A \in M_{n,k}$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : \mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]) \simeq M_{k,n} \rightarrow \mathbb{C} : B \rightarrow \text{Tr}(AB).$$

Η απεικόνιση $M_{n,k} \rightarrow (\mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]))^* : A \rightarrow f_A$ είναι 1-1 και επί (επειδή $\dim(\mathcal{B}(\ell^2[n], \ell^2[k]))^* = \dim M_{k,n} = \dim M_{n,k} < \infty$, και κάθε γραμμ. μορφή είναι συνεχής) και είναι γραμμική.

Κλάσεις Schatten πεπερασμένης διάστασης Στα επόμενα, θεωρούμε δύο χώρους Hilbert E και F με $\dim E = n$ και $\dim F = k$ πεπερασμένες. Έχουμε τότε

$$\mathcal{B}(E, F) \simeq M_{k,n} \text{ μέσω της } A \rightarrow [a_{ij}], \quad a_{ij} = \langle Ae_j, f_i \rangle.$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{A} & F \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{[a_{ij}]} & \mathbb{C}^k \end{array}$$

Αν $A \in \mathcal{B}(E, F)$, ο $A^* A \in \mathcal{B}(E) \simeq M_n$ είναι θετικός, άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{e_j\}$ του E και $s_j := s_j(A) \geq 0$ ώστε $A^* A e_j = s_j^2 e_j$.

Ορίζω $|A| = (A^* A)^{1/2}$ ως εξής: $|A|e_j := s_j(A)e_j$, $j = 1, \dots, n$.

Θέτω $f_j = \frac{1}{s_j} A e_j$ όταν $s_j \neq 0$. Παρατηρώ ότι $\{f_j\}$ ορθοκανονικά, διότι $\langle A f_j, A f_k \rangle = s_j^2 \langle e_j, e_k \rangle$ και ορίζω $V : E \rightarrow F$ με $V e_j = f_j$ όταν $s_j \neq 0$ και $V e_j = 0$ όταν $s_j = 0$. Έχουμε

$$A = V|A| \quad (\text{πολική αναπαράσταση}).$$

Ορισμός 1. Για $1 \leq p < \infty$, η p -νόρμα του Schatten ορίζεται για $A \in \mathcal{B}(E, F)$ από

$$\|A\|_p^p := \text{Tr}(|A|^p) = \sum |s_j(A)|^p = \|(s_j(A))\|_{\ell^p}^p$$

$$\|A\|_\infty := \sup\{\|Ax\|, x \in \text{ball}(E)\}.$$

Σχόλιο Δεν είναι προφανές ότι η $\|\cdot\|_p$ είναι νόρμα όταν $p \neq 2$ (για $p = 2$, είναι η νόρμα που επάγει το εσωτερικό γινόμενο $\langle A, B \rangle := \text{Tr}(B^*A)$). Θα το δείξουμε για $p = 1$.

Άσκηση. $\|A\|_\infty = \sup_p \|A\|_p$.

Κάθε $A \in \mathcal{B}(F, E)$ ορίζει γραμμική μορφή¹

$$f_A : \mathcal{B}(E, F) \rightarrow \mathbb{C} : B \rightarrow \text{Tr}(AB).$$

Η απεικόνιση $\mathcal{B}(E, F) \rightarrow (\mathcal{B}(E, F))^* : A \rightarrow f_A$ είναι 1-1 (διότι $f_A(A^*) = \text{Tr}(AA^*) \neq 0$ όταν $A \neq 0$) και επί (επειδή $\dim \mathcal{B}(E, F) = kn < \infty$, άρα κάθε γραμμ. μορφή είναι συνεχής και $\dim (\mathcal{B}(E, F))^* = \dim \mathcal{B}(E, F) = \dim \mathcal{B}(F, E)$ και είναι γραμμική. Έχουμε

$$\|f_A\| = \sup\{|\text{Tr}(AB)| : B \in \mathcal{B}(E, F), \|B\|_\infty \leq 1\}.$$

Πρόταση 1. $\|f_A\| = \|A\|_1 = \text{Tr}(|A|)$.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 2. Αν $A, B \in M_m$ και $A \geq 0$,

$$A \geq 0 \Rightarrow |\text{Tr}(AB)| \leq \|B\| \text{Tr}(A).$$

Απόδειξη. Ας θυμηθούμε κατ' αρχήν ότι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας έχει μη αρνητικό ίχνος. Επομένως η απεικόνιση

$$\text{Tr} : M_m(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} : A \mapsto \text{Tr}(A)$$

είναι θετική γραμμική μορφή. Συνεπώς,

(α) αν $A, B \in M_m$ και $A, B \geq 0$, επειδή $A^{1/2} \|B\| A^{1/2} - A^{1/2} B A^{1/2} \geq 0$, έχουμε

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(A^{1/2} B A^{1/2}) \leq \text{Tr}(A^{1/2} \|B\| A^{1/2}) = \|B\| \text{Tr}(A).$$

(b) Έστω τώρα $A, B \in M_m$ και $A \geq 0$. Θέτουμε $f(B) = \text{Tr}(AB)$. Αν $B = B^*$ γράφουμε $B = B_+ - B_-$ όπου $B_+ \geq 0, B_- \geq 0$ και $B_+ B_- = 0$. Έχουμε

$$|f(B)| = |f(B_+) - f(B_-)| \leq |f(B_+)| + |f(B_-)| \leq \text{Tr}(A)(\|B_+\| + \|B_-\|) = \text{Tr}(A) \|B\|$$

γιατί $\|B_+\| + \|B_-\| = \|B\|$ αφού $B_+ B_- = 0$.

(γ) Για γενικό $B \in M_m$ βρίσκω $\lambda \in \mathbb{C}$ με $|\lambda| = 1$ ώστε $|f(B)| = \lambda f(B)$ οπότε θέτοντας $\lambda B = B_1 + iB_2$ με $B_j = B_j^*$ έχω

$$|f(B)| = \lambda f(B) = f(\lambda B) = f(B_1) + i f(B_2) = f(B_1)$$

¹ Αν $A \in \mathcal{B}(F, E)$ και $B \in \mathcal{B}(E, F)$ έχουμε $AB \in \mathcal{B}(E) \simeq M_n$, και το Tr ορίζεται.

γιατί $|f(B)| \in \mathbb{R}$ και $f(B_1) \in \mathbb{R}$ άρα τελικά

$$|f(B)| = f(B_1) \stackrel{(b)}{\leq} \text{Tr}(A) \|B_1\| \leq \text{Tr}(A) \|B\| = \text{Tr}(A) \|B\| .$$

□

Απόδειξη της Πρότασης. Αν $A \in \mathcal{B}(F, E)$ και $B \in \mathcal{B}(E, F)$ γράφουμε $A = V|A|$ όπου $|A| : F \rightarrow F$ θετικός και $V : F \rightarrow E$ με $\|V\| \leq 1$ οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(AB)| &= |\text{Tr}(V|A|B)| = \text{Tr}(|A|(BV)) \\ &\stackrel{(L)}{\leq} \|BV\| \text{Tr}(|A|) \leq \|B\| \text{Tr}(|A|) = \|B\| \|A\|_1 \end{aligned}$$

(η ανισότητα (L) προκύπτει από το Λήμμα). Έπεται ότι

$$\|f_A\| = \sup\{|\text{Tr}(AB)| : B \in \mathcal{B}(E, F), \|B\|_\infty \leq 1\} \leq \|A\|_1 .$$

Για να δείξουμε ότι ισχύει ισότητα, αν $Ae_j = s_j f_j$ (από την πολική αναπαράσταση), θέτουμε $Bf_j = e_j$ όταν $s_j \neq 0$ και $Bf_j = 0$ αλλιώς. Τότε $\|B\|_\infty = 1$ και $\text{Tr}(BA) = \sum_j \langle BAe_j, e_j \rangle = \sum_j s_j \langle Bf_j, e_j \rangle = \sum_j s_j = \text{Tr}(|A|)$. □

Πόρισμα 3. Η νόρμα ίχνους είναι πράγματι νόρμα.

Απόδειξη. Προφανώς $\|\lambda A\|_1 = |\lambda| \|A\|_1$ όταν $\lambda \in \mathbb{C}$. Επίσης αν $\|A\|_1 = 0$ τότε $\text{Tr}(|A|) = 0$ οπότε $|A| = 0$ και άρα $A = 0$. Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει από τη σχέση $\|f_A\| = \|A\|_1$ και τη γραμμικότητα του ίχνους, άρα και της απεικόνισης $A \mapsto f_A$:

$$\|A + B\|_1 = \|f_{A+B}\| = \|f_A + f_B\| \leq \|f_A\| + \|f_B\| = \|A\|_1 + \|B\|_1 .$$

Ο Δυϊκός του χώρου Schatten πεπερασμένης διάστασης

Αν $1 \leq p < \infty$, ο χώρος Schatten είναι ο χώρος Banach

$$\mathcal{C}_p(E, F) = (\mathcal{B}(E, F), \|\cdot\|_p) \simeq (M_{k,n}, \|\cdot\|_p) .$$

Κάθε $A \in \mathcal{B}(F, E)$ ορίζει γραμμική μορφή

$$f_A : \mathcal{C}_p(E, F) \rightarrow \mathbb{C} : B \rightarrow \text{Tr}(AB) .$$

Πρόταση 4. Αν $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, η απεικόνιση

$$\mathcal{C}_q(F, E) \rightarrow (\mathcal{C}_p(E, F))^* : A \rightarrow f_A$$

είναι ισομετρία: $\|f_A\| = \|A\|_q$ (και επί).

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι η $A \rightarrow f_A$ είναι γραμμικός ισομορφισμός.

Για $p = \infty$ (οπότε $q = 1$): έχουμε δείξει ότι $\|f_A\| = \|A\|_1$.

Εξετάζουμε την περίπτωση $p = 1$ (οπότε $q = \infty$). Εφαρμόζοντας το Λήμμα για τον $B = V|B|$ έχουμε $|\text{Tr}(AB)| = \text{Tr}(AV|B|) \leq \|AV\| \text{Tr}(|B|) = \|AV\| \|B\|_1 \leq \|A\| \|B\|_1$ οπότε $\|f_A\| \leq \|A\|$.

Για να δείξουμε την ισότητα $\|f_A\| = \|A\|$, θεωρούμε ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα v του $|A|$ με ιδιοτιμή $\|A\|$. Αν $w := \frac{Av}{\|A\|}$, παρατηρούμε ότι το w είναι μοναδιαίο διάνυσμα, γιατί $\langle w, w \rangle = \frac{1}{\|A\|^2} \langle Av, Av \rangle = \frac{1}{\|A\|^2} \langle A^* Av, v \rangle = \frac{1}{\|A\|^2} \langle \|A\|^2 v, v \rangle = 1$. Ορίζουμε $B \in \mathcal{B}(E, F)$ τον τελεστή $B = vw^*$. Τότε $Bw = v$ και

$By = 0$ για κάθε $y \perp w$. Επομένως ο $|B|^2 = B^*B = ww^*vw^* = ww^*$ είναι η προβολή στον $\text{span}\{w\}$, οπότε $|B| = ww^*$ και άρα $\|B\|_1 = \text{Tr}(ww^*) = 1$, συνεπώς

$$f_A(B) = \text{Tr}(AB) = \langle ABw, w \rangle = \langle Aw, w \rangle = \|A\| \langle w, w \rangle = \|A\|$$

όπως θέλαμε.

Όταν $1 < p < \infty$, από την μη-μεταθετική ανισότητα Hölder²

$$|\text{Tr}(AB)| \leq \|B\|_p \|A\|_q$$

έχουμε $\|f_A\| \leq \|A\|_q$. Αλλά, αν $A = U|A|$ (πολική αναπαράσταση) και θέσω $B = \|A\|_q^{-q/p} |A|^{q-1} U^*$, τότε $\|B\|_p = 1$ και $f_A(B) = \text{Tr}(BA) = \|A\|_q$. $\square$

2 Σε απειροδιάστατους χώρους

2.1 Τελεστές ίχνους (trace class operators)

Στα επόμενα, σταθεροποιούμε δυο χώρους Hilbert H και K , διαχωρίσιμους για ευκολία. Θυμίζουμε ότι κάθε συμπαγής τελεστής $A : H \rightarrow K$ γράφεται

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) f_k e_k^* \quad (*)$$

όπου $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ ορθοκανονική ακολουθία από ιδιοδιανύσματα του τελεστή $|A| = (A^*A)^{1/2}$ με αντίστοιχες ιδιοτιμές $s_k(A)$, και $s_k(A) f_k = A e_k$. Είναι γνωστό ότι υπάρχει ιδιοτιμή του $|A|$ που ισούται με τη νόρμα του. Γράφουμε λοιπόν την ακολουθία $(s_k(A))$ σε μη αύξουσα διάταξη, δηλ. $s_k(A) \geq s_{k+1}(A)$ (οπότε $s_1(A) = \|A\|$). Παρατηρούμε ότι

$$s_k(A) = \langle A e_k, f_k \rangle = \langle |A| e_k, e_k \rangle$$

(οπότε τα $s_k(A)$ καθορίζονται μοναδικά, και, αν $\lambda \geq 0$, ο πληθύνισμος του συνόλου $\{k \in \mathbb{N} : s_k(A) = \lambda\}$ είναι ακριβώς η διάσταση του ιδιόχωρου του $|A|$ με ιδιοτιμή λ - που είναι πεπερασμένη, όταν $\lambda \neq 0$).

Στην περίπτωση που ο A έχει πεπερασμένη τάξη N (οπότε $s_k(A) = 0$ για $k > N$) έχουμε

$$\text{Tr}(|A|) = \sum_{k=1}^N \langle |A| e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^N s_k(A).$$

Ορισμός 2. Αν $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής τελεστής ορίζουμε

$$\|A\|_1 := \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) \in [0, \infty].$$

Ένας τελεστής $A : H \rightarrow K$ λέγεται **τελεστής ίχνους (trace class operator)** (γράφουμε $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$) αν είναι συμπαγής και $\|A\|_1 < \infty$.

²Απόδειξη και σχετική βιβλιογραφία υπάρχει στο <http://users.uoa.gr/~akatavol/seminar1718/qitslides.pdf>

Πρόταση 5. Αν $A : H \rightarrow K$ είναι συμπαγής, για κάθε δύο ορθοκανονικές οικογένειες $\{x_k\} \subseteq H$ και $\{y_k\} \subseteq K$, έχουμε

$$\sum_{k=1}^N |\langle Ax_k, y_k \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) \quad \text{για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Αν επιπλέον $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$ τότε υπάρχουν ορθοκανονικές οικογένειες ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, y_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A).$$

Απόδειξη. Έστω $A = \sum_{k=1}^{\infty} s_k f_k e_k^*$ όπως στην (*). Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N |\langle Ax_n, y_n \rangle| &= \sum_{n=1}^N \left| \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k f_k e_k^* \right) x_n, y_n \right\rangle \right| \\ &= \sum_{n=1}^N \left| \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle f_k, y_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle \right|, \quad \text{αφού } (f_k e_k^*) x_n = \langle x_n, e_k f_k \rangle \\ &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} s_k |\langle f_k, y_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sum_{n=1}^N |\langle f_k, y_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle| \\ &\stackrel{(cs)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sqrt{\left(\sum_{n=1}^N |\langle f_k, y_n \rangle|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N |\langle x_n, e_k \rangle|^2 \right)} \\ &\stackrel{(b)}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \|f_k\| \|e_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy - Schwarz στη σχέση (cs) και την Bessel στη σχέση (b)).

Αν τώρα $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$, τότε, θέτοντας $x_k = e_k$ και $y_k = f_k$, επειδή $\langle Ae_k, f_k \rangle = s_k(A) \geq 0$ έχουμε $\langle Ae_k, f_k \rangle = |\langle Ae_k, f_k \rangle|$ για κάθε k , πράγμα που αποδεικνύει τη ζητούμενη ισότητα.³ $\square$

Πρόταση 6. Αν $A \in \mathcal{C}_1(H)$, για κάθε ορθοκανονική βάση $\{x_k\}$ του H , έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, x_k \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A) \langle f_i, e_i \rangle.$$

Συνεπώς ο αριθμός

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, x_k \rangle := \text{Tr}(A)$$

δεν εξαρτάται από την ορθοκανονική βάση του H και ονομάζεται **ίχνος (trace)** του A . Ισχύει η ανισότητα

$$|\text{Tr}(A)| \leq \text{Tr}(|A|) = \|A\|_1.$$

³ $\forall N, \sum_{k=1}^N |\langle Ax_k, y_k \rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, y_k \rangle.$

Πράγματι, από την Πρόταση

$$|\mathrm{Tr}(A)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \langle Ax_k, x_k \rangle \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A) |\langle f_i, e_i \rangle| \leq \sum_{i=1}^{\infty} s_i(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle |A| e_i, e_i \rangle = \mathrm{Tr}(|A|) = \|A\|_1.$$

Απόδειξη. Εφόσον $\sum_{k=1}^{\infty} s_k < \infty$, η ανισότητα της προηγούμενης Πρότασης δείχνει ότι για κάθε δύο ορθοκανονικές οικογένειες $\{x_k\}$ και $\{y_k\}$ στον H , η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax_n, y_n \rangle$ συγκλίνει απόλυτα. Επομένως είναι δυνατή η εναλλαγή αθροίσεων ως προς n και k στη σχέση (a) παρακάτω:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax_n, y_n \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k f_k e_k^* \right) x_n, y_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle f_k, y_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle \\ &\stackrel{(a)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_k, y_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle. \end{aligned}$$

Ειδικότερα αν η $\{x_k\}$ είναι ορθοκανονική **βάση** στον H και θέσουμε $y_k = x_k$, επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f_k, x_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle = \langle f_k, e_k \rangle$ (Parseval) έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Ax_n, x_n \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sum_{n=1}^{\infty} \langle f_k, x_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle f_k, e_k \rangle.$$

Θεώρημα 7. Έστω $A \in \mathcal{B}(H, K)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

1. $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$.
2. $|A| \in \mathcal{C}_1(H)$.
3. Κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{x_n\}$ του H ικανοποιεί $\sum_{k=1}^{\infty} \langle |A| x_k, x_k \rangle < \infty$.
4. Υπάρχει μια ορθοκανονική **βάση** $\{x_n\}$ του H ώστε $\sum_{k=1}^{\infty} \langle |A| x_k, x_k \rangle < \infty$.
5. Υπάρχει μια σταθερά M τέτοια ώστε, για κάθε δύο ορθοκανονικές οικογένειες $\{x_k\} \subseteq H$ και $\{y_k\} \subseteq K$, να έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Ax_k, y_k \rangle| \leq M.$$

Απόδειξη. (1) $\iff$ (2) : Άμεση από τον ορισμό των τελεστών ίχνους (και το γεγονός ότι ο A είναι συμπαγής αν και μόνον αν ο $|A|$ είναι συμπαγής).

(2) $\Rightarrow$ (3) : Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5 στον $|A| \in \mathcal{C}_1(H)$ έχουμε $\sum_{k=1}^{\infty} \langle |A| x_k, x_k \rangle \leq \|A\|_1 < \infty$ για κάθε ορθοκανονική οικογένεια $\{x_n\}$ στον H .

(3) $\Rightarrow$ (4) : Προφανές.

(4) $\Rightarrow$ (2) Θα δείξουμε πρώτα ότι ο $|A|$ είναι συμπαγής.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, θεωρούμε την ορθή προβολή $P_n = \sum_{k=1}^n x_k x_k^*$ στον $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$. Γράφουμε $C := |A|^{1/2}$ και θέτουμε $C_n := C P_n$, που είναι φραγμένος τελεστής πεπερασμένης τάξης. Αφού η $\{x_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του H , κάθε $x \in H$ γράφεται $x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, x_k \rangle x_k$, οπότε $x - P_n x = \sum_{k>n} \langle x, x_k \rangle x_k$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|(C - C_n)x\|_H &= \|C \sum_{k>n} \langle x, x_k \rangle x_k\| = \left\| \sum_{k>n} \langle x, x_k \rangle C x_k \right\| \\ &\leq \sum_{k>n} |\langle x, x_k \rangle| \|C x_k\| \\ &\leq \left(\sum_{k>n} |\langle x, x_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k>n} \|C x_k\|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|x\| \left(\sum_{k>n} \langle C x_k, C x_k \rangle \right)^{1/2} = \|x\| \left(\sum_{k>n} \langle |A| x_k, x_k \rangle \right)^{1/2} \\ \text{άρα } \|C - C_n\| &\leq \left(\sum_{k>n} \langle |A| x_k, x_k \rangle \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Όμως, επειδή $\sum_{k=1}^{\infty} \langle |A| x_k, x_k \rangle < \infty$, έχουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k>n} \langle |A| x_k, x_k \rangle \right) = 0$. Έπεται ότι ο τελεστής C είναι όριο, στην τοπολογία της νόρμας τελεστή, της ακολουθίας (C_n) φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης και συνεπώς είναι συμπαγής. Επομένως και ο $|A| = C^2$ είναι συμπαγής.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $|A| = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e_k e_k^*$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \langle |A| x_n, x_n \rangle &= \sum_{n=1}^N \left\langle \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k e_k e_k^* \right) x_n, x_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} s_k \langle e_k, x_n \rangle \langle x_n, e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} s_k \sum_{n=1}^N |\langle e_k, x_n \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k \|P_N e_k\|^2 \\ \text{άρα } \sum_{k=1}^{\infty} s_k \|P_N e_k\|^2 &\leq \sum_{n=1}^N \langle |A| x_n, x_n \rangle < \infty \end{aligned}$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Αφού για κάθε k η ακολουθία $(s_k \|P_N e_k\|^2)_N$ είναι μη αρνητική, αύξουσα και $\lim_N s_k \|P_N e_k\|^2 = s_k \|e_k\|^2 = s_k$, λόγω μονότονης σύγκλισης έχουμε $\lim_N \sum_{k=1}^{\infty} s_k \|P_N e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_N s_k \|P_N e_k\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k$.

Άρα $\sum_{k=1}^{\infty} s_k \leq \sum_{n=1}^{\infty} \langle |A| x_n, x_n \rangle < \infty$, οπότε $|A| \in \mathcal{C}_1(H)$.

(2) $\Rightarrow$ (5) Έπεται από την Πρόταση 5 με $M = \|A\|_1$.

(5) $\Rightarrow$ (4) Θεωρούμε την πολική αναπαράσταση $A = V|A|$ και θυμίζουμε ότι η V είναι μερική ισομετρία με αρχικό χώρο $(\ker A)^{\perp}$. Επιλέγουμε λοιπόν μια ορθοκανονική βάση B_1 του χώρου $(\ker A)^{\perp}$ και μια ορ-

θοκανονική βάση B_2 του $\ker A$. Θέτουμε $y_x = Vx$ όταν $x \in B_1$ και παρατηρούμε ότι η $\{y_x : x \in B_1\} \subseteq K$ είναι ορθοκανονική οικογένεια.

Η $B_1 \cup B_2$ είναι ορθοκανονική βάση του H και $|A|x = 0$ για κάθε $x \in B_2$, οπότε

$$\begin{aligned} \sum_{x \in B_1 \cup B_2} \langle |A|x, x \rangle &= \sum_{x \in B_1} \langle |A|x, x \rangle \\ &= \sum_{x \in B_1} \langle V^*Ax, x \rangle = \sum_{x \in B_1} \langle Ax, Vx \rangle \\ &= \sum_{x \in B_1} \langle Ax, y_x \rangle \leq M \end{aligned}$$

από την υπόθεση, αφού $\langle Ax, y_x \rangle = \langle |A|x, x \rangle \geq 0$ και οι οικογένειες B_1 και $\{y_x : x \in B_1\}$ είναι ορθοκανονικές. $\square$

Πρόταση 8. Αν $A, B \in \mathcal{C}_1(H, K)$, τότε

$$\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1 .$$

Συνεπώς:

(α) Ο $\mathcal{C}_1(H, K)$ είναι γραμμικός χώρος και

(β) Η $\|\cdot\|_1$ είναι νόρμα στον $\mathcal{C}_1(H, K)$.

Απόδειξη. Αφού οι A και B είναι συμπαγείς, ο τελεστής $A + B$ είναι συμπαγής, επομένως γράφεται

$$A + B = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A + B) f_k e_k^* \quad \text{όπου} \quad s_k(A + B) = \langle (A + B)e_k, f_k \rangle \geq 0 .$$

Επομένως για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N s_k(A + B) &= \sum_{k=1}^N \langle (A + B)e_k, f_k \rangle = \sum_{k=1}^N |\langle (A + B)e_k, f_k \rangle| \\ &= \sum_{k=1}^N |\langle Ae_k, f_k \rangle + \langle Be_k, f_k \rangle| \\ &\leq \sum_{k=1}^N |\langle Ae_k, f_k \rangle| + \sum_{k=1}^N |\langle Be_k, f_k \rangle| \leq \|A\|_1 + \|B\|_1 \end{aligned}$$

άρα

$$\|A + B\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A + B) \leq \|A\|_1 + \|B\|_1 .$$

Πρόταση 9. Αν $A \in \mathcal{C}_1(H, K)$, τότε $A^* \in \mathcal{C}_1(K, H)$ και $\|A^*\|_1 = \|A\|_1$.

Ειδικότερα αν $B \in \mathcal{C}_1(H)$ τότε $\operatorname{Re} B, \operatorname{Im} B \in \mathcal{C}_1(H)$ και αν $C = C^* \in \mathcal{C}_1(H)$ τότε $C_+, C_- \in \mathcal{C}_1(H)$. Δηλαδή ο $\mathcal{C}_1(H)$ είναι η γραμμική θήκη των θετικών του στοιχείων.

Απόδειξη. Από τη σχέση $A = \sum_{k=1}^{\infty} s_k f_k e_k^*$ έχουμε $A^* = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e_k f_k^*$, οπότε $|A^*| = (AA^*)^{1/2} = \sum_{k=1}^{\infty} s_k f_k f_k^*$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς $A \in \mathcal{C}_1(H, K) \iff A^* \in \mathcal{C}_1(K, H)$. Μπορούμε λοιπόν στις ισοδυναμίες του Θεωρήματος 7 να προσθέσουμε και τις ακόλουθες:

$$A \in \mathcal{C}_1(H, K) \iff A^* \in \mathcal{C}_1(K, H) \iff |A| \in \mathcal{C}_1(H) \iff |A^*| \in \mathcal{C}_1(K).$$

Τότε έχουμε

$$\|A^*\|_1 = \text{Tr}(|A^*|) = \sum_k s_k \text{Tr}(f_k f_k^*) = \sum_k s_k = \|A\|_1.$$

Οι υπόλοιποι ισχυρισμοί έπονται τώρα από το γεγονός ότι ο $\mathcal{C}_1(H)$ είναι γραμμικός χώρος. $\square$

2.2 Οι δικοί

Στην παράγραφο αυτή θα χαρακτηρίσουμε τους δικούς των χώρων με νόρμα $(\mathcal{C}_1(H, K), \|\cdot\|_1)$ και $(\mathcal{K}(H, K), \|\cdot\|_{op})$. Οι χαρακτηρισμοί αυτοί είναι τα μη-μεταθετικά (ή “κβαντικά”) ανάλογα των χαρακτηρισμών

$$(\ell_1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)^* \simeq (\ell_{\infty}(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\infty}) \quad \text{και} \quad (c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\infty})^* \simeq (\ell_1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1).$$

Θα χρειασθούν μερικά προκαταρκτικά.

Παρατήρηση 10. Αν ο $X \in \mathcal{B}(H)$ είναι τελεστής ίχνους και ο $U : H \rightarrow K$ είναι unitary, τότε $UXU^* \in \mathcal{C}_1(K)$ και

$$\text{Tr}(UXU^*) = \text{Tr}(X).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $|UXU^*|^2 = UX^*U^*UXU^* = UX^*XU^* = U|X|^2U^*$ και συνεπώς $|UXU^*| = U|X|U^*$ από τη μοναδικότητα της θετικής τετραγωνικής ρίζας.

Τώρα, αν $\{e_i\}$ είναι μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του H τότε η $\{f_i\} := \{Ue_i\}$ είναι ορθοκανονική βάση του K οπότε

$$\begin{aligned} \text{Tr}(|UXU^*|) &= \text{Tr}(U|X|U^*) = \sum_i \langle (U|X|U^*)f_i, f_i \rangle = \sum_i \langle |X|U^*f_i, U^*f_i \rangle = \sum_i \langle |X|e_i, e_i \rangle = \text{Tr}(|X|) \\ \text{και} \quad \text{Tr}(UXU^*) &= \sum_i \langle (UXU^*)f_i, f_i \rangle = \sum_i \langle XU^*f_i, U^*f_i \rangle = \sum_i \langle Xe_i, e_i \rangle = \text{Tr}(X) \end{aligned}$$

πράγμα που δείχνει και τους δύο ισχυρισμούς. $\square$

Παρατήρηση 11. Κάθε φραγμένος τελεστής $C \in \mathcal{B}(H)$ είναι γραμμικός συνδυασμός (τεσσάρων) unitaries.

Απόδειξη. Κάθε C είναι γραμμικός συνδυασμός (δύο) αυτοσυζυγών συστολών ($\frac{1}{\|C\|} \text{Re } C$ και $\frac{1}{\|C\|} \text{Im } C$).

Αν όμως T είναι μια αυτοσυζυγής συστολή τότε ο $I - T^2$ είναι θετικός, οπότε θέτοντας $U = T + i\sqrt{I - T^2}$ έχουμε $U^* = T - i\sqrt{I - T^2}$, άρα ο U είναι unitary, και $T = \frac{1}{2}(U + U^*)$. $\square$

Πρόταση 12. Αν $A \in \mathcal{B}(K, H)$ και $B \in \mathcal{C}_1(H, K)$, έχουμε

- (1) $AB \in \mathcal{C}_1(H)$ και $BA \in \mathcal{C}_1(K)$
- (2) $|\text{Tr}(AB)| \leq \|A\| \text{Tr}(|B|)$
- (3) ισχύει η ισότητα $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$.

Απόδειξη. (1) Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $H = K$.

Έστω πρώτα ότι ο A είναι unitary. Έχουμε τότε $|AB|^2 = B^*A^*AB = B^*B = |B|^2$, άρα $|AB| = |B|$ οπότε $AB \in \mathcal{C}_1(H)$. Επίσης $|BA|^2 = A^*B^*BA = A^*|B|^2A$ άρα $|BA| = A^*|B|A$ (μοναδικότητα της τετραγωνικής ρίζας). Επομένως $\text{Tr}(|BA|) = \text{Tr}(|B|) < \infty$ από την Παρατήρηση 10 και άρα ο BA είναι επίσης τελεστής ίχνους.

Τέλος $\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(A(BA)A^*) = \text{Tr}(AB)$ από την Παρατήρηση 10.

Δείξαμε λοιπόν ότι, όταν ο A είναι unitary, τότε οι AB και BA είναι τελεστές ίχνους και $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$. Τα ίδια ισχύουν, λόγω γραμμικότητας, και όταν ο A είναι γραμμικός συνδυασμός από unitaries, επομένως (από την Παρατήρηση 11) για οποιονδήποτε $A \in \mathcal{B}(H)$.

Για τη γενική περίπτωση $A \in \mathcal{B}(K, H)$ και $B \in \mathcal{C}_1(H, K)$, θεωρούμε τις πολικές αναπαραστάσεις $B = V|B|$ και $B^* = W|B^*|$. Έχουμε $AB = (AV)|B|$ που είναι τελεστής ίχνους, ως γινόμενο των $AV \in \mathcal{B}(H)$ και $|B| \in \mathcal{C}_1(H)$. Επίσης ο $BA = |B^*|(W^*A)$ είναι τελεστής ίχνους για τον ίδιο λόγο.

(2) Γράφουμε $B = \sum_k s_k f_k e_k^*$ όπου η $\sum_k s_k = \sum_k s_k(B)$ συγκλίνει απόλυτα. Τότε $Be_n = s_n f_n$. Επεκτείνουμε την $\{e_n\}$ σε μια ορθοκανονική βάση του H (επισυνάπτοντας μια ορθοκανονική βάση του $\ker B$ αν χρειασθεί). Τότε

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(AB)| &= \left| \sum_n \langle AB e_n, e_n \rangle \right| \\ &= \left| \sum_n s_n \langle A f_n, e_n \rangle \right| \leq \sum_n s_n |\langle A f_n, e_n \rangle| \\ &\leq \sum_n s_n \|A\| \\ &= \text{Tr}(|B|) \|A\|. \end{aligned}$$

(3) Μένει να δείξουμε ότι $\text{Tr}(BA) = \text{Tr}(AB)$. Αν $\{u_k\}$ είναι μια οποιαδήποτε ορθοκανονική βάση του K , χρησιμοποιώντας την ισότητα Parseval $\sum_n \langle x, e_n \rangle \langle e_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ για κάθε $x, y \in H$, έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Tr}(BA) &= \sum_k \langle BA u_k, u_k \rangle_K = \sum_k \langle A u_k, B^* u_k \rangle_H \\ &= \sum_k \left(\sum_n \langle A u_k, e_n \rangle_H \langle e_n, B^* u_k \rangle_H \right) \quad \{e_n\} \text{ ο.κ. βάση του } H \\ &= \sum_n \left(\sum_k \langle B e_n, u_k \rangle_K \langle A u_k, e_n \rangle_H \right) \quad \text{λόγω απολ. σύγκλισης}^4 \\ &= \sum_n \left(\sum_k \langle B e_n, u_k \rangle_K \langle u_k, A^* e_n \rangle_K \right) \quad \{u_k\} \text{ ο.κ. βάση του } K \\ &= \sum_n \langle B e_n, A^* e_n \rangle_K = \sum_n \langle AB e_n, e_n \rangle_H \\ &= \text{Tr}(AB). \end{aligned}$$

□

Προχωρούμε τώρα στον χαρακτηρισμό του δυικού του χώρου $(\mathcal{C}_1(H, K), \|\cdot\|_1)$.

⁴ Πράγματι, $\sum_n (\sum_k |\langle B e_n, u_k \rangle| |\langle u_k, A^* e_n \rangle|) = \sum_n (\sum_k |\langle u_k, A^* e_n \rangle| s_n |\langle f_n, u_k \rangle|) \leq \sum_n s_n (\sum_k |\langle f_n, u_k \rangle|^2 \sum_k |\langle u_k, A^* e_n \rangle|^2)^{1/2} \leq \sum_n s_n \|A^* e_n\| \|f_n\| \leq \sum_n s_n \|A^*\| < \infty$.

Ας θυμηθούμε πρώτα την «κλασική» ή «μεταθετική» περίπτωση:

Πρόταση 13 (Ο δυικός του ℓ_1 «είναι» ο ℓ_∞).

(1) Για κάθε $a = (a(n)) \in \ell_\infty(\mathbb{N})$, η γραμμική μορφή

$$f_a : \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C} : b = (b(n)) \mapsto \sum_k a(k)b(k)$$

είναι συνεχής και $\|f_a\| \leq \|a\|_\infty$.

Παρατηρούμε ότι $f_a(e_n) = a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(2) Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $f : \ell_1(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$, αν ορίσουμε $a(n) := f(e_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $a = (a(n))$ ανήκει στον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ ($\|a\|_\infty \leq \|f\|$) και ικανοποιεί $f_a = f$.

Επομένως η απεικόνιση $a \mapsto f_a$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός από τον $\ell_\infty(\mathbb{N})$ επί του δυικού του $\ell_1(\mathbb{N})$.

Πρόταση 14. Για κάθε $A \in \mathcal{B}(K, H)$, η γραμμική μορφή

$$f_A : C_1(H, K) \rightarrow \mathbb{C} : B \mapsto \text{Tr}(AB)$$

είναι συνεχής και $\|f_A\| \leq \|A\|_{op}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in C_1(H, K)$. Δείξαμε στην Πρόταση 12 ότι

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(AB)| &\leq \text{Tr}(|B|) \|A\| = \|B\|_1 \|A\| \\ \text{άρα} \quad |f_A(B)| &\leq \|B\|_1 \|A\|. \end{aligned}$$

Δηλαδή η f_A είναι συνεχής και $\|f_A\| \leq \|A\|$. □

Το Πόρισμα που ακολουθεί ισχυροποιεί την ανισότητα της Πρότασης 12 (2).

Πόρισμα 15. Αν $A \in \mathcal{B}(K, H)$ για κάθε $B \in C_1(H, K)$, έχουμε

$$|\text{Tr}(AB)| \leq \text{Tr}(|AB|) \leq \|A\| \text{Tr}(|B|).$$

Επομένως $\|AB\|_1 \leq \|A\| \|B\|_1$.

Δηλαδή η απεικόνιση $L_A : B \mapsto AB$ είναι φραγμένος τελεστής στον $C_1(H, K)$ με νόρμα $\|L_A\| \leq \|A\|$.

Απόδειξη. Εφόσον ο AB είναι τελεστής ίχνους, ξέρουμε ότι $|\text{Tr}(AB)| \leq \text{Tr}(|AB|)$ όπως είδαμε μετά την Πρόταση 6.

Για την δεύτερη ανισότητα, αν γράψουμε την πολική αναπαράσταση $AB = W|AB|$ του AB έχουμε $|AB| = W^*AB$, άρα

$$\text{Tr}(|AB|) = \text{Tr}(W^*AB) \leq \|W^*A\| \text{Tr}(|B|) \leq \|A\| \text{Tr}(|B|)$$

από την Πρόταση 12 (2) και την $\|W^*\| \leq 1$. □

Η επόμενη παρατήρηση είναι το «μη μεταθετικό» ή «κβαντικό» ανάλογο της παρατήρησης $f_a(e_n) = a(n) \forall n \in \mathbb{N}$ που οδήγησε στο (2) της Πρότασης 13.

Παρατήρηση. $f_A(xy^*) = \langle Ax, y \rangle \quad \forall x \in K, y \in H$.

Πρόταση 16. Κάθε συνεχής γραμμική μορφή $f \in (C_1(H, K))^*$ είναι της μορφής f_A όπου $A \in \mathcal{B}(K, H)$.

Ισχύει η ισότητα $\|f_A\| = \|A\|_{op}$.

Δηλαδή ο δυικός του $C_1(H, K)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{B}(K, H)$ μέσω της απεικόνισης $A \mapsto f_A : \mathcal{B}(K, H) \rightarrow (C_1(H, K))^*$.

Απόδειξη. Έστω $f \in (\mathcal{C}_1(H, K), \|\cdot\|_1)^*$. Θα βρω $A \in \mathcal{B}(K, H)$ ώστε $f = f_A$.

Κάθε ζεύγος $(x, y) \in K \times H$ ορίζει έναν αριθμό $f(xy^*) \in \mathbb{C}$. Δημιουργείται λοιπόν μια απεικόνιση

$$b : K \times H \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto f(xy^*).$$

Επειδή η απεικόνιση $(x, y) \rightarrow xy^*$ είναι sesquilinear και η f είναι γραμμική, η b είναι sesquilinear. Επίσης,

$$|b(x, y)| = |f(xy^*)| \leq \|f\| \|xy^*\|_1 = \|f\| \|x\| \|y\|$$

άρα η b είναι φραγμένη (από $\|f\|$). Συνεπώς από το Θεώρημα Riesz υπάρχει $A_f \in \mathcal{B}(K, H)$ ώστε

$$b(x, y) = \langle A_f x, y \rangle \quad \text{για κάθε } (x, y) \in K \times H$$

και

$$|\langle A_f x, y \rangle| = |f(xy^*)| \leq \|f\| \|xy^*\|_1 = \|f\| \|x\| \|y\|$$

για κάθε $(x, y) \in K \times H$, άρα

$$\|A_f\| \leq \|f\|. \quad (*)$$

Έχουμε

$$f(xy^*) = \langle A_f x, y \rangle = \text{Tr}(A_f xy^*) = f_{A_f}(xy^*)$$

Δηλαδή $f(B) = f_{A_f}(B)$ για κάθε $B = xy^*$. Δείχνουμε ότι η ισότητα ισχύει για κάθε $B \in \mathcal{C}_1(H, K)$.

Έστω $B = \sum_k s_k x_k y_k^* \in \mathcal{C}_1(H, K)$. Θέτουμε $B_N = \sum_{k=1}^N s_k x_k y_k^*$. Παρατηρούμε ότι

$$f(B_N) = \sum_{k=1}^N s_k f(x_k y_k^*) = \sum_{k=1}^N s_k f_{A_f}(x_k y_k^*) = f_{A_f}(B_N).$$

Όμως

$$B - B_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} s_k x_k y_k^* \quad \text{άρα} \quad \|B - B_N\|_1 = \sum_{k=N+1}^{\infty} |s_k|$$

άρα $\lim_N \|B - B_N\|_1 = 0$. Επειδή οι απεικονίσεις f και f_{A_f} είναι συνεχείς, έχουμε

$$f(B) = \lim_N f(B_N) = \lim_N f_{A_f}(B_N) = f_{A_f}(B)$$

δηλαδή $f = f_{A_f}$.

Δείξαμε λοιπόν ότι η $A \rightarrow f_A$ απεικονίζει τον $\mathcal{B}(K, H)$ επί του δυικού του $(\mathcal{C}_1(H, K), \|\cdot\|_1)$.

Τέλος παρατηρούμε ότι, αν $A \in \mathcal{B}(K, H)$ και $f = f_A$, τότε

$$\langle A_f x, y \rangle = f_A(xy^*) = \langle Ax, y \rangle$$

για κάθε $(x, y) \in K \times H$ (ορισμός του A_f), άρα $A_f = A$. Επομένως η ανισότητα (*) δείχνει ότι $\|A\| \leq \|f_A\|$. Είχαμε όμως δείξει (στην Πρόταση 14) ότι $\|f_A\| \leq \|A\|$, συνεπώς ισχύει ισότητα.

Δείξαμε δηλαδή ότι η απεικόνιση

$$(\mathcal{B}(K, H), \|\cdot\|) \rightarrow ((\mathcal{C}_1(H, K), \|\cdot\|_1)^* : A \mapsto f_A$$

που είναι προφανώς γραμμική, είναι ισομετρία και επί. □

Δεν ισχύει όμως ότι κάθε συνεχής γραμμική μορφή στον $\mathcal{B}(H, K)$ είναι της μορφής f_A για κάποιο $A \in \mathcal{C}_1(K, H)$.

Παράδειγμα 17. Υπάρχει μια συνεχής γραμμική μορφή $f : \mathcal{B}(\ell^2) \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $f(e_n e_m^*) = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ και $f(I) = 1$.

Απόδειξη. Ο χώρος $\mathcal{K}(\ell^2)$ των συμπαγών τελεστών είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(\ell^2)$, και ο ταυτοτικός τελεστής I δεν ανήκει στον $\mathcal{K}(\ell^2)$. Συνεπώς από το Θεώρημα Hahn-Banach (!) υπάρχει μια συνεχής γραμμική μορφή $f : \mathcal{B}(\ell^2) \rightarrow \mathbb{C}$ που μηδενίζει τον $\mathcal{K}(\ell^2)$ και ικανοποιεί $f(I) = 1$.⁵ $\square$

Προφανώς η f δεν μπορεί να είναι της μορφής f_A για κάποιο τελεστή A (γιατί θα έπρεπε $\langle Ae_n, e_m \rangle = 0$ για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$).

Το ίδιο φαινόμενο εμφανίζεται και στην «κλασική» περίπτωση:

Παράδειγμα 18. Υπάρχει μια συνεχής γραμμική μορφή $f : \ell^\infty(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$ που ικανοποιεί $f(e_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $f(\mathbf{1}) = 1$.

Η απόδειξη είναι ίδια με το προηγούμενο παράδειγμα.

Υπενθυμίζουμε ότι στην κλασική περίπτωση ισχύει το εξής:

Πρόταση 19 (Ο δυικός του c_0 «είναι» ο ℓ_1).

(1) Για κάθε $a = (a(n)) \in \ell_1(\mathbb{N})$, η γραμμική μορφή

$$f_a : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C} : b = (b(n)) \mapsto \sum_k a(k)b(k)$$

είναι συνεχής και $\|f_a\| \leq \|a\|_1$.

Παρατηρούμε ότι $f_a(e_n) = a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(2) Για κάθε συνεχή γραμμική μορφή $f : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{C}$, αν ορίσουμε $a(n) := f(e_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η ακολουθία $a = (a(n))$ ανήκει στον $\ell_1(\mathbb{N})$ ($\|a\|_1 \leq \|f\|$) και ικανοποιεί $f_a = f$.

Επομένως η απεικόνιση $a \mapsto f_a$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός από τον $\ell_1(\mathbb{N})$ επί του δυικού του $c_0(\mathbb{N})$.

Πρόταση 20. Για κάθε $A \in \mathcal{C}_1(K, H)$ η γραμμική μορφή $f_A : \mathcal{K}(H, K) \rightarrow \mathbb{C}$ που ορίζεται από την $f_A(B) = \text{Tr}(AB)$ είναι φραγμένη και $\|f_A\| = \|A\|_1$.

Κάθε συνεχής γραμμική μορφή στον $\mathcal{K}(H, K)$ είναι της μορφής f_A για κάποιο $A \in \mathcal{C}_1(K, H)$. Δηλαδή ο δυικός του $\mathcal{K}(H, K)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathcal{C}_1(K, H)$.

Απόδειξη. Αν $A \in \mathcal{C}_1(K, H)$, για κάθε $B \in \mathcal{B}(H, K)$ (άρα και για κάθε $B \in \mathcal{K}(H, K)$) ξέρουμε ότι $AB \in \mathcal{C}_1(H)$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 14 (αντιστρέφοντας τους ρόλους των A και B , έχουμε

$$|\text{Tr}(AB)| \leq \|A\|_1 \|B\|.$$

Επομένως η απεικόνιση

$$f_A : B \mapsto \text{Tr}(AB)$$

είναι συνεχής στον $(\mathcal{K}(H, K), \|\cdot\|)$ και $|f_A(B)| \leq \|A\|_1 \|B\|$ για κάθε $B \in \mathcal{K}(H, K)$, άρα $\|f_A\| \leq \|A\|_1$.

⁵Ίσως αξίζει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη δεν είναι κατασκευαστική, μάλιστα στηρίζεται στο Αξίωμα Επιλογής (μέσω του Hahn-Banach).

Παρατηρούμε ότι στην απόδειξη της Πρότασης 1 δείξαμε ότι υπάρχει ένας φραγμένος τελεστής πρώτης τάξης $B \in \mathcal{K}(H, K)$ με $\|B\| = 1$ και $|\text{Tr}(AB)| = \|A\|_1$ (η ίδια απόδειξη για την ύπαρξη του B λειτουργεί και στην απειροδιάστατη περίπτωση). Επομένως

$$\|A\|_1 \geq \|f_A\| = \sup\{|\text{Tr}(AB)| : B \in \text{ball } \mathcal{K}(H, K)\} \geq \|A\|_1$$

και άρα ισχύει ισότητα.

Μένει να δείξουμε ότι η απεικόνιση $A \rightarrow f_A$ είναι επί..

Έστω λοιπόν $f : \mathcal{K}(H, K) \rightarrow \mathbb{C}$ μια $\|\cdot\|$ -συνεχής γραμμική μορφή. Θέλουμε να βρούμε έναν $A \in \mathcal{C}_1(K, H)$ ώστε $f = f_A$.

Όπως στην Πρόταση 16 για κάθε $x \in K$ και $y \in H$ θεωρούμε την sesquilinear μορφή

$$b : K \times H \rightarrow \mathbb{C} : (x, y) \mapsto f(xy^*).$$

που ικανοποιεί

$$|b(x, y)| = |f(xy^*)| \leq \|f\| \|xy^*\|_{op} = \|f\| \|x\| \|y\|$$

άρα η b είναι φραγμένη (από $\|f\|$). Συνεπώς από το Θεώρημα Riesz υπάρχει $A = A_f \in \mathcal{B}(K, H)$ ώστε

$$b(x, y) = \langle Ax, y \rangle \quad \text{για κάθε } (x, y) \in K \times H$$

δηλαδή $f(xy^*) = \langle Ax, y \rangle$.

Έπεται ότι για κάθε φραγμένο τελεστή πεπερασμένης τάξης $B = \sum_{k=1}^N x_k y_k^* \in \mathcal{B}(H, K)$ θα έχουμε

$$\text{Tr}(A \sum_k x_k y_k^*) = \sum_k \text{Tr}(A x_k y_k^*) = \sum_k \langle A x_k, y_k \rangle = \sum_k f(x_k y_k^*) = f\left(\sum_k x_k y_k^*\right).$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

Ισχυρισμός $A \in \mathcal{C}_1(K, H)$.

Αν το δείξουμε, τότε ορίζεται η γραμμική μορφή f_A στον $\mathcal{K}(H, K)$ και είναι φραγμένη. Επίσης, από τον ορισμό της f_A ταυτίζεται με την f στον γραμμικό χώρο των φραγμένων τελεστών πεπερασμένης τάξης. Αλλά ο χώρος αυτός είναι $\|\cdot\|_{op}$ -πυκνός στον $\mathcal{K}(H, K)$ ⁶ και οι γραμμ. μορφές f και f_A είναι $\|\cdot\|_{op}$ -συνεχείς. Έπεται λοιπόν ότι $f = f_A$, όπως θέλαμε.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Αρκεί να δειχθεί ότι $|A| \in \mathcal{C}_1(K)$. Παρατηρούμε ότι, αν $A = V|A|$ είναι η πολική αναπαράσταση του A ,

$$|\text{Tr}(|A|C)| \leq \|f\| \|C\|_{op} \quad \text{για κάθε finite rank } C \in \mathcal{B}(K). \quad (*)$$

Πράγματι, αφού $|A| = V^* A$ έχουμε (χρησιμοποιώντας την Πρόταση 12)

$$|\text{Tr}(|A|C)| = |\text{Tr}(V^* A C)| = |\text{Tr}(A C V^*)| = |f(C V^*)| \leq \|f\| \|C V^*\|_{op} \leq \|f\| \|C\|_{op}$$

γιατί ο $C V^* \in \mathcal{B}(H, K)$ έχει πεπερασμένη τάξη.

⁶Κάθε συμπαγής προσεγγίζεται ως προς την $\|\cdot\|_{op}$ από φραγμένους τελεστές πεπερασμένης τάξης.

Θεωρούμε τώρα μια αυθαίρετη ορθοκανονική βάση $\{u_k\}$ του K και για κάθε $N \in \mathbb{N}$ θέτουμε $C_N := \sum_{k=1}^N u_k u_k^*$. Παρατηρούμε ότι $\|C_N\|_{op} = 1$ (ο C_N είναι προβολή (πεπερασμένης τάξης)) και για κάθε N

$$\sum_{k=1}^N \langle |A| u_k, u_k \rangle = |\text{Tr}(|A| C_N)| \leq \|f\| \|C_N\|_{op} = \|f\|$$

$$\text{άρα } \sum_{k=1}^{\infty} \langle |A| u_k, u_k \rangle \leq \|f\| .$$

Από το Θεώρημα 7, έπεται τώρα ότι ο $|A|$ είναι τελεστής ίχνους.

Έτσι αποδείχθηκε ο Ισχυρισμός και ολοκληρώθηκε η απόδειξη. $\square$

Αφού κάθε δυικός ενός χώρου με νόρμα είναι χώρος Banach, εφόσον δείξαμε ότι ο χώρος $(C_1(K, H), \|\cdot\|_1)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον δυικό του $(\mathcal{K}(H, K), \|\cdot\|_{op})$, έχουμε και το επόμενο

Πόρισμα 21. *Ο χώρος $(C_1(K, H), \|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Banach.*