

Άσκηση 1. Ξέρουμε ότι κάθε $\rho \in \mathcal{C}_1(H)$ ορίζει γραμμική μορφή $\phi_\rho : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C} : a \mapsto \text{Tr}(\rho a)$ και ότι η $\phi = \phi_\rho$ είναι κατάσταση στην $\mathcal{B}(H)$ αν $\rho \in \mathcal{C}_1(H)^+$ και $\text{Tr}(\rho) = 1$. Δείξτε ότι, αν η φασματική ανάλυση του ρ είναι $\rho = \sum_n s_n \xi_n \xi_n^*$, η αναπαράσταση GNS $(\pi_\phi, \mathcal{H}_\phi, \xi_\phi)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την (π, H_1, ξ) όπου $H_1 = H \otimes \ell^2(\mathbb{N})$, $\pi(a) = a \otimes I$ και $\xi = \sum_n \sqrt{s_n} \xi_n \otimes e_n$ με την προϋπόθεση $s_n > 0$ για κάθε n (δείτε τη σχετική συζήτηση στις 11/11/2021).

Άσκηση 2. Έστω X συμπαγής χώρος Hausdorff (ή συμπαγής μετρικός χώρος) και $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα. Ορίζουμε

$$C(X, \mathcal{A}) := \{f : X \rightarrow \mathcal{A} \mid f \text{ συνεχής}\}.$$

Δείξτε ότι, με πράξεις και ενέλιξη κατά σημείο και με τη νόρμα $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_{\mathcal{A}} \mid x \in X\}$, η $C(X, \mathcal{A})$ είναι C^* άλγεβρα.

Δείξτε επίσης ότι υπάρχει μια γραμμική και 1-1 απεικόνιση από το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $C(X) \otimes \mathcal{A}$ στην $C(X, \mathcal{A})$ με πυκνή εικόνα.

Άσκηση 3. Έστω H χώρος Hilbert και $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι ένας τελεστής $T = [T_{ij}] \in \mathcal{B}(H^n)$ είναι τελεστής ίχνους ($T \in \mathcal{C}_1(H^n)$) αν και μόνον αν κάθε T_{ij} είναι τελεστής ίχνους ($T_{ij} \in \mathcal{C}_1(H)$) και ότι $\text{Tr}(T) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(T_{ii})$.

Άσκηση 4. Έστω H χώρος Hilbert και $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Δείξτε ότι η προβολή $P \in \mathcal{B}(H)$ σε κάθε κλειστό A -αναλλοίωτο υπόχωρο του H ανήκει στην άλγεβρα von Neumann $\{A\}'$. (Προαιρετικά) Αν επιπλέον ο A είναι συμπαγής, δείξτε ότι η προβολή σε κάθε ιδιόχωρο του A ανήκει στην άλγεβρα von Neumann $\{A\}''$.

Άσκηση 5. Έστω H χώρος Hilbert, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια άλγεβρα von Neumann και $T \in \mathcal{M}$. Αν $T = V|T|$ είναι η πολική αναπαράσταση του T (όπου V μερική ισομετρία με $\ker V = \ker T$), δείξτε ότι
(i) Ο $|T|$ ανήκει στην $\mathcal{M}$.

(ii) Αν ο T είναι αντιστρέψιμος, τότε η V είναι unitary και ανήκει στην $\mathcal{M}$.

(iii) Ακόμα κι αν ο T δεν είναι αντιστρέψιμος, η V ανήκει στην $\mathcal{M}$.

Υπόδειξη Μια μέθοδος είναι να χρησιμοποιήσει κανείς το θεώρημα δεύτερου μεταθέτη, εξετάζοντας χωριστά τι συμβαίνει στον $|T|$ -αναλλοίωτο υπόχωρο $\ker |T|$ και στον $(\ker |T|)^\perp$.