

Άσκηση 1. Έστω $f \in L^1([0, 1])$. Ορίζουμε, για κάθε $g \in C([0, 1])$,

$$\omega_f(g) := \int g(t)f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η $\omega_f : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή και ότι $\|\omega_f\| = \|f\|_1$.

Δείξτε επίσης ότι η ω_f είναι θετική γραμμική μορφή αν και μόνον αν $\|\omega_f\| = \omega_f(\mathbf{1})$ (όπου $\mathbf{1}(t) = 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$), ισοδύναμα, αν η f παίρνει σ.π. μη αρνητικές τιμές, καθώς και ότι η ω_f είναι κατάσταση αν και μόνον αν η f είναι κατανομή πιθανότητας.

Για να «προσεγγίσουμε» μετρήσιμες συναρτήσεις με συνεχείς, θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα Luzin¹ Έστω X μετρικός χώρος και μ πεπερασμένο μέτρο στο X . Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $h : X \rightarrow \mathbb{C}$ και $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ ώστε $\mu(\{h \neq g\}) < \epsilon$ και $\sup(\{|g(x)| : x \in X\}) \leq \sup(\{|h(x)| : x \in X\})$.

Ειδικές περιπτώσεις: Αν $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ μπορούμε να βρούμε $g : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν $h = \chi_A$ μπορούμε να βρούμε $g : X \rightarrow [0, 1]$ (αντικαθιστώντας αν χρειασθεί την g με την g^2).

Λύση (i) Για κάθε $g \in C([0, 1])$, από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$|\omega_f(g)| \leq \int |gf|dm \leq \|g\|_\infty \int |f|dm = \|g\|_\infty \|f\|_1$$

οπότε η ω_f είναι συνεχής και έχει νόρμα $\|\omega_f\| \leq \|f\|_1$. Για να δείξουμε ισότητα, γράφουμε $f = u|f|$ όπου η u είναι μετρήσιμη συνάρτηση με $|u(t)| = 1$ σ.π., άρα $\|u\|_\infty = 1$. Θα θέλαμε να γράψουμε $\omega_f(\bar{u}) = \int \bar{u}f dm = \int |f|dm$ για να συμπεράνουμε ότι $\|f\| = \omega_f(\bar{u}) \leq \|\omega_f\|$. Όμως η $\bar{u}$ μπορεί να μην είναι συνεχής. Αλλά μπορούμε να την προσεγγίσουμε κατάλληλα με συνεχείς συναρτήσεις. Ένας τρόπος είναι ο ακόλουθος:

Από το Θεώρημα Luzin (στον χώρο μέτρου $([0, 1], \mu)$ όπου $\mu(A) = \int_A |f|dm$), για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g_\epsilon \in C([0, 1])$ με $\|g_\epsilon\|_\infty \leq \|\bar{u}\|_\infty = 1$ ώστε το μέτρο του συνόλου $A := \{t \in [0, 1] : g_\epsilon(t) \neq \bar{u}(t)\}$ να είναι μικρότερο από ϵ : $\mu(A) = \int_A |f|dm < \epsilon$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \int |f|dm &= \int \bar{u}f dm = \int g_\epsilon f dm + \int (\bar{u} - g_\epsilon)f dm \\ \text{οπότε } \|f\|_1 &= \left| \int \bar{u}f dm \right| \leq |\omega_f(g_\epsilon)| + \int |\bar{u} - g_\epsilon||f|dm \\ &\leq |\omega_f(g_\epsilon)| + 2 \int_A |f|dm \\ &< |\omega_f(g_\epsilon)| + 2\epsilon \leq \|\omega_f\| \|g_\epsilon\|_\infty + 2\epsilon \\ \text{άρα } \|f\|_1 &\leq \|\omega_f\| + 2\epsilon < \|f\|_1 + 2\epsilon \end{aligned}$$

από το οποίο έπεται ότι $\|\omega_f\| = \|f\|_1$, αφού το $\epsilon > 0$ ήταν τυχόν.

(ii) Ισχυρισμός. $\omega_f(\bar{g}) = \overline{\omega_f(g)} \quad \forall g \in C([0, 1]) \iff f = \bar{f}$ σ.π..

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι αν $f = \bar{f}$ σ.π. τότε $\omega_f(\bar{g}) = \overline{\omega_f(g)}$ για κάθε $g \in C([0, 1])$. Για το αντίστροφο,

$$\begin{aligned} \omega_f(\bar{g}) = \overline{\omega_f(g)} \quad \forall g \in C([0, 1]) &\iff \omega_f(g) \in \mathbb{R} \quad \forall g \in C([0, 1]) \text{ με } g = \bar{g} \\ &\iff \int g f dm \in \mathbb{R} \quad \forall g \in C([0, 1]) \text{ με } g = \bar{g} \\ &\iff \int g(f - \bar{f}) dm = 0 \quad \forall g \in C([0, 1]) \text{ με } g = \bar{g}. \end{aligned}$$

¹ Δείτε πχ Κουμουλλή-Νεγρεπόντη, Θεωρία Μέτρου, 7.12 ή στην η-τάξη <https://eclass.uoa.gr/courses/MATH157> Σημειώσεις, Παρ. 8.2.

Αλλά για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq [0, 1]$, μπορούμε να προσεγγίσουμε τη χαρακτηριστική του συνάρτηση χ_A με συνεχείς *πραγματικές* συναρτήσεις όπως στην (i). Τότε, από την τελευταία συνθήκη έπεται ότι

$$\int \chi_A(f - \bar{f})dm = 0 \quad \forall A \subseteq [0, 1] \text{ μετρήσιμο}$$

από το οποίο έπεται ότι $f - \bar{f} = 0$ σ.π.

(iii) *Ισχυρισμός.* $\omega_f(g) \geq 0 \quad \forall g \in C([0, 1])^+ \iff f \geq 0$ σ.π..

Απόδειξη. Πάλι είναι προφανές ότι αν $f \geq 0$ σ.π. τότε $\omega_f(g) \geq 0$ για κάθε μη αρνητική $g \in C([0, 1])$.

Για το αντίστροφο, παρατηρούμε πρώτα ότι, αν η ω_f είναι θετική, τότε στέλνει πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις σε πραγματικούς αριθμούς. Πράγματι, αν $g \in C([0, 1])$ είναι πραγματική τότε $\omega_f(g^\pm) \geq 0$ και άρα $\omega_f(g) = \omega_f(g^+) - \omega_f(g^-) \in \mathbb{R}$. Από το (ii) έπεται ότι $f = \bar{f}$ σ.π.

Πρέπει να δείξουμε ότι $f \geq 0$ σ.π.. Αν όχι, υπάρχει $\epsilon > 0$ και μετρήσιμο σύνολο $A \subseteq [0, 1]$ θετικού μέτρου ώστε $f(t) < -\epsilon$ για κάθε $t \in A$ και άρα $\int f \chi_A dm < -\epsilon$. Προσεγγίζοντας την μη αρνητική συνάρτηση χ_A με συνεχείς *μη αρνητικές* συναρτήσεις όπως στο (i), θα βρίσκαμε τότε μια συνεχή συνάρτηση $g \geq 0$ με $\int f g dm < 0$, άτοπο.

(iv) *Ισχυρισμός.* $\omega_f(g) \geq 0 \quad \forall g \in C([0, 1])^+ \iff \|\omega_f\| = \omega_f(\mathbf{1})$.

Απόδειξη. Αν $\omega_f(g) \geq 0 \quad \forall g \in C([0, 1])^+$ τότε απ' το (iii) έχουμε ότι $f \geq 0$ σ.π. και άρα

$$\|\omega_f\| = \|f\|_1 = \int |f| dm = \int f dm = \omega_f(\mathbf{1}).$$

Υποθέτουμε αντίστροφα ότι $\|\omega_f\| = \omega_f(\mathbf{1})$. Τότε $\int |f| dm = \int f dm$ οπότε

$$\int |f| dm = \int f dm = \int \operatorname{Re} f dm + i \int \operatorname{Im} f dm \in \mathbb{R}$$

άρα $\int \operatorname{Im} f dm = 0$ και συνεπώς $\int |f| dm = \int f dm = \int \operatorname{Re} f dm$. Επομένως, η *μη αρνητική* συνάρτηση $|f| - \operatorname{Re} f$ ικανοποιεί $\int (|f| - \operatorname{Re} f) dm = 0$ και συνεπώς μηδενίζεται σ.π.. Έχουμε λοιπόν $|f| = \operatorname{Re} f$ σ.π.. Όμως,

$$(\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2 = |f|^2 = (\operatorname{Re} f)^2 \quad \text{σ.π.}$$

που σημαίνει ότι $\operatorname{Im} f = 0$ σ.π. Τελικά λοιπόν $f = \operatorname{Re} f$ σ.π., που είναι μη αρνητική συνάρτηση γιατί $\operatorname{Re} f = |f|$ σ.π.²

(v) Η ω_f είναι κατάσταση (state) αν $\|\omega_f\| = \omega_f(\mathbf{1}) = 1$. Από το (iv) και (iii), η πρώτη ισότητα ισοδυναμεί με $f \geq 0$ σ.π. οπότε η ω_f είναι κατάσταση αν $f \geq 0$ σ.π. και $\int f dm = 1$, που σημαίνει ακριβώς ότι η είναι κατανομή πιθανότητας. $\square$

Άσκηση 2. Έστω $T \in \mathcal{C}_1(H)$ (H μιγαδικός χώρος Hilbert). Ορίζουμε, για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$,

$$\omega_T(A) := \operatorname{Tr}(AT).$$

Έχουμε δείξει ότι η $\omega_T : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι *συνεχής γραμμική μορφή* και ότι $\|\omega_T\| = \|T\|_1$.

Δείξτε ότι η ω_T διατηρεί την *ενέλιξη* (δηλ. $\omega_T(A^*) = \overline{\omega_T(A)}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$) αν και μόνον αν $T = T^*$.

Δείξτε επίσης ότι η ω_T είναι *θετική γραμμική μορφή* αν και μόνον αν $\|\omega_T\| = \omega_T(I)$, *ισοδύναμα*, αν $T \geq 0$.

Δείξτε ότι η ω_T είναι *κατάσταση* αν $T \geq 0$ και $\operatorname{Tr}(T) = 1$.

Λύση (i) Όπως στην πρώτη άσκηση, παρατηρούμε ότι η ω_T διατηρεί την *ενέλιξη* αν και μόνον αν $\omega_T(A) \in \mathbb{R}$ για κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$, δηλαδή αν $\operatorname{Tr}(AT) = \overline{\operatorname{Tr}(AT)}$ για κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$, δηλαδή αν $\operatorname{Tr}(AT) = \operatorname{Tr}(T^*A)$ για κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$, δηλαδή αν $\operatorname{Tr}(AT) = \operatorname{Tr}(AT^*)$ για κάθε $A = A^* \in$

²Ευχαριστώ τον Μ.Μ. για την ιδέα και τον Μ.Α. για το επιχείρημα αυτό.

$\mathcal{B}(H)$, δηλαδή αν $\text{Tr}(A(T - T^*)) = 0$ για κάθε $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. Το τελευταίο ισχύει προφανώς αν $T = T^*$. Και αντίστροφα αν ισχύει η ισότητα $\text{Tr}(A(T - T^*)) = 0$ για κάθε $A = xx^*$ όπου $x \in H$ θα έχουμε $\langle (T - T^*)x, x \rangle = 0$ για κάθε $x \in H$, άρα, από την ταυτότητα πολικότητας, $\langle (T - T^*)x, y \rangle = 0$ για κάθε $x, y \in H$, άρα $T - T^* = 0$.

(ii) Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned} \omega_T(A) = \text{Tr}(AT) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}(H)^+ &\iff \text{Tr}(B^2T) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(H)^+ \\ &\iff \text{Tr}(BTB) \geq 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(H)^+. \end{aligned}$$

Αν $T \geq 0$ τότε $BTB \geq 0$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(H)^+$ άρα $\text{Tr}(BTB) \geq 0$.

Αντίστροφα, αν $\text{Tr}(BTB) \geq 0$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(H)^+$ τότε θέτοντας $B = xx^*$ όπου $x \in H$ είναι νόρμας 1 (οπότε $B^2 = xx^*$) βρίσκουμε $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ και άρα $T \geq 0$ αφού το x ήταν αυθαίρετο μοναδιαίο διάνυσμα.

(iii) Δείχνουμε τώρα ότι $T \geq 0$ αν $\|\omega_T\| = \omega_T(I)$.

Αν $T \geq 0$, τότε βέβαια $\|\omega_T\| = \|T\|_1 = \text{Tr}(|T|) = \text{Tr}(T) = \omega_T(I)$.

Για το αντίστροφο: Υποθέτουμε ότι $\|\omega_T\| = \omega_T(I)$ οπότε $\text{Tr}(|T|) = \text{Tr}(T)$.

Γράφουμε $T = \sum_{k=1}^{\infty} s_k f_k e_k^*$ όπου $\{e_k\}$ ορθοκανονική ακολουθία από ιδιοδιανύσματα του $|T|$ και $\{s_k\}$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές του $|T|$ και $s_k f_k = T e_k$. Τότε $\text{Tr}(|T|) = \sum_k s_k$ και $\text{Tr}(T) = \sum_k s_k \langle f_k, e_k \rangle$. Ας θέσουμε $c_k := \langle f_k, e_k \rangle$ οπότε $|c_k| \leq 1$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\text{Tr}(|T|) = \text{Tr}(T)$ άρα

$$\sum_k s_k = \sum_k s_k c_k = \sum_k s_k \text{Re} c_k + i \sum_k s_k \text{Im} c_k \in \mathbb{R}$$

άρα $\sum_k s_k \text{Im} c_k = 0$ και συνεπώς $\sum_k s_k = \sum_k s_k c_k = \sum_k s_k \text{Re} c_k$. Όμως, $|\text{Re} c_k| \leq |c_k| \leq 1$ άρα $s_k - s_k \text{Re} c_k \geq 0$ για κάθε k , οπότε αφού $\sum_k (s_k - s_k \text{Re} c_k) = 0$ θα έχουμε $s_k - s_k \text{Re} c_k = 0$ άρα $\text{Re} c_k = 1$ για κάθε k . Επειδή όμως

$$(\text{Re} c_k)^2 + (\text{Im} c_k)^2 = |c_k|^2 \leq 1$$

έπεται ότι $\text{Im} s_k = 0$ για κάθε k . Έχουμε λοιπόν τελικά $c_k = \text{Re} c_k = 1$, δηλαδή $\langle f_k, e_k \rangle = 1 = \|e_k\| \|f_k\|$ για κάθε k . Αυτό όμως σημαίνει (περίπτωση ισότητας στην ανισότητα Cauchy-Schwarz) ότι το $\{f_k, e_k\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, και αφού $\langle f_k, e_k \rangle = 1$ έχουμε $f_k = e_k$.

Συνεπώς ο T γράφεται $T = \sum_{k=1}^{\infty} s_k e_k e_k^*$, άρα $T = |T| \geq 0$.

Η τελευταία ισοδυναμία είναι άμεση, όπως στην Άσκηση 1. □

Άσκηση 3. Έστω $\Psi : \mathcal{C}_1(H_1) \rightarrow \mathcal{C}_1(H_2)$ γραμμική. Λέμε ότι η Ψ διατηρεί την ενέλιξη όταν $\Psi(T)^* = (\Psi(T))^*$ για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H_1)$. Λέμε ότι η Ψ είναι θετική όταν $\Psi(T) \geq 0$ για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H_1)^+$. Λέμε ότι η Ψ είναι πλήρως θετική ($T \in CP$) όταν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\Psi^{(n)} : [T_{ij}] \mapsto [\Psi(T_{ij})]$ στέλνει θετικούς $[T_{ij}] \in \mathcal{C}_1(H_1^n)^+$ σε θετικούς $[\Psi(T_{ij})] \in \mathcal{C}_1(H_2^n)^+$. Η Ψ λέγεται κβαντικό κανάλι όταν είναι πλήρως θετική και διατηρεί το ίχνος ($\Psi \in CPTP$).

Αν $\Psi : \mathcal{C}_1(H_1) \rightarrow \mathcal{C}_1(H_2)$ είναι γραμμική και συνεχής, δείξτε ότι ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση

$$\Psi^\dagger : \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_1)$$

από τη σχέση

$$\text{Tr}(\Psi^\dagger(A)T) = \text{Tr}(A\Psi(T)) \quad A \in \mathcal{B}(H_2), T \in \mathcal{C}_1(H_1)$$

(εξηγήστε γιατί υπάρχει φραγμένος τελεστής $\Psi^\dagger(A)$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή).

Δείξτε ότι

1. Η απεικόνιση $\Psi^\dagger$ διατηρεί την ενέλιξη αν η Ψ διατηρεί την ενέλιξη.
2. Η $\Psi^\dagger$ είναι θετική αν η Ψ είναι θετική.

3. $H \Psi^\dagger$ είναι πλήρως θετική αν η Ψ είναι πλήρως θετική.

4. $H \Psi^\dagger$ είναι UCP (μοναδιαία και πλήρως θετική) αν η Ψ είναι κβαντικό κανάλι.

Λύση Ορισμός της $\Psi^\dagger : \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_1)$: Κάθε $A \in \mathcal{B}(H_2)$ ορίζει μια γραμμική μορφή

$$g_A : \mathcal{C}_1(H_1) \rightarrow \mathbb{C} : T \mapsto \Psi(T) \mapsto \text{Tr}(A\Psi(T))$$

που είναι συνεχής (σύνθεση συνεχών απεικονίσεων), άρα $g_A \in \mathcal{C}_1(H_1)^*$. Από τον ισομορφισμό του $\mathcal{C}_1(H_1)^*$ με τον $\mathcal{B}(H_1)$ προκύπτει ότι υπάρχει μοναδικός $\Psi^\dagger(A) \in \mathcal{B}(H_1)$ ώστε

$$g_A(T) = \text{Tr}(\Psi^\dagger(A)T) \quad \text{για κάθε } T \in \mathcal{C}_1(H_1)$$

$$\text{δηλ. } \text{Tr}(\Psi^\dagger(A)T) = \text{Tr}(A\Psi(T)) \quad \text{για κάθε } T \in \mathcal{C}_1(H_1).$$

Αφού η $A \mapsto g_A$ είναι γραμμική, η $\Psi^\dagger$ είναι γραμμική.

(1) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(H_2)$ και $T \in \mathcal{C}_1(H_1)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\Psi^\dagger(A^*)T) &= \text{Tr}(A^*\Psi(T)) = \overline{\text{Tr}(\Psi(T)^*A)} \\ \text{και } \text{Tr}((\Psi^\dagger(A))^*T) &= \overline{\text{Tr}(T^*\Psi^\dagger(A))} = \overline{\text{Tr}(\Psi(T^*)A)}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\Psi^\dagger(A^*) = (\Psi^\dagger(A))^* \quad \forall A \in \mathcal{B}(H_2) \iff \Psi(T)^* = \Psi(T^*) \quad \forall T \in \mathcal{C}_1(H_1).$$

Πράγματι, αν $\Psi^\dagger(A^*) = (\Psi^\dagger(A))^* \quad \forall A \in \mathcal{B}(H_2)$, οπότε $\text{Tr}((\Psi^\dagger(A^*) - (\Psi^\dagger(A))^*)T) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}(H_2)$, άρα $\text{Tr}((\Psi(T)^* - \Psi(T^*))A) = 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}(H_2)$, οπότε $(\Psi(T)^* - \Psi(T^*)) = 0$ και με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται και η άλλη κατεύθυνση.

(2) Υποθέτουμε ότι η $\Psi^\dagger$ είναι θετική γραμμική απεικόνιση. Έστω $T \in \mathcal{C}_1(H_1)$ θετικός, να δείξουμε ότι $\Psi(T) \geq 0$. Για κάθε θετικό $A \in \mathcal{B}(H_2)$ έχουμε $\Psi^\dagger(A) \geq 0$, άρα

$$\omega_{\Psi(T)}(A) = \text{Tr}(A\Psi(T)) = \text{Tr}(\Psi^\dagger(A)T) = \text{Tr}(T^{1/2}\Psi^\dagger(A)T^{1/2}) \geq 0.$$

Συνεπώς η $\omega_{\Psi(T)}$ είναι θετική γραμμική μορφή. Από την Άσκηση 2, αυτό συνεπάγεται ότι $\Psi(T) \geq 0$. Δείξαμε ότι η Ψ στέλνει θετικούς τελεστές ίχνους σε θετικούς τελεστές ίχνους.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι η Ψ στέλνει θετικούς τελεστές ίχνους σε θετικούς τελεστές ίχνους. Τότε, για κάθε $x \in H_1$, αφού $T := xx^* \geq 0$ ο τελεστής $\Psi(T)$ είναι θετικός, άρα η $\omega_{\Psi(T)}$ είναι θετική γραμμική μορφή. Συνεπώς, αν ο $A \in \mathcal{B}(H_2)$ είναι θετικός τότε $\omega_{\Psi(T)}(A) \geq 0$ οπότε

$$\langle \Psi^\dagger(A)x, x \rangle = \text{Tr}(\Psi^\dagger(A)xx^*) = \text{Tr}(A\Psi(xx^*)) = \omega_{\Psi(T)}(A) \geq 0$$

άρα $\Psi^\dagger(A) \geq 0$.

(3) Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη παρατήρηση.³ Ένας τελεστής $Z = [Z_{ij}] \in \mathcal{B}(H^n)$ είναι τελεστής ίχνους ($Z \in \mathcal{C}_1(H^n)$) αν και μόνον αν κάθε Z_{ij} είναι τελεστής ίχνους ($Z_{ij} \in \mathcal{C}_1(H)$). Τότε $\widetilde{\text{Tr}}(Z) = \sum_{i=1}^n \text{Tr}(Z_{ii})$ (θα γράφουμε προσωρινά (για περισσότερη σαφήνεια) $\widetilde{\text{Tr}}(Z)$ για το ίχνος στον $\mathcal{C}_1(H^n)$).

Αν λοιπόν ο $Z = XY$ είναι τελεστής ίχνους, έχουμε $Z_{ij} = \sum_k X_{ik}Y_{kj}$ άρα

$$\widetilde{\text{Tr}}(XY) = \widetilde{\text{Tr}}(Z) = \sum_i \text{Tr}(Z_{ii}) = \sum_i \text{Tr}(\sum_k X_{ik}Y_{ki}).$$

Υποθέτουμε ότι η $\Psi^\dagger$ είναι πλήρως θετική και θεωρούμε ένα αυθαίρετο $n \in \mathbb{N}$. Τότε η $(\Psi^\dagger)^{(n)}$ είναι θετική. Πρέπει να δείξουμε ότι η $\Phi := \Psi^{(n)} : \mathcal{C}_1(H_1^{(n)}) \rightarrow \mathcal{C}_1(H_2^{(n)})$ είναι θετική.

³ Δείτε το επόμενο φύλλο ασκήσεων

Ισχυρισμός. $(\Psi^{(n)})^\dagger = (\Psi^\dagger)^{(n)}$, δηλαδή $\Phi^\dagger = (\Psi^\dagger)^{(n)}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Αν $A = [A_{ij}] \in \mathcal{B}(H^{(n)})$ και $T = [T_{ij}] \in \mathcal{C}_1(H^{(n)})$, εφαρμόζοντας την παρατήρηση για $X = (\Psi^\dagger)^{(n)}(A) = [\Psi^\dagger(A_{ij})]$ και $Y = T$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{Tr}}((\Psi^\dagger)^{(n)}(A)T) &= \widetilde{\text{Tr}}([\Psi^\dagger(A_{ij})][T_{ij}]) \\ &= \sum_{i,k} \text{Tr}(\Psi^\dagger(A_{ik})T_{ki}) = \sum_{i,k} \text{Tr}(A_{ik}\Psi(T_{ki})) \\ &= \widetilde{\text{Tr}}([A_{ij}][\Psi(T_{ij})]) = \widetilde{\text{Tr}}(A\Psi^{(n)}(T)) \\ &= \widetilde{\text{Tr}}(A\Phi(T)).\end{aligned}$$

Από την άλλη, η απεικόνιση $\Phi := \Psi^{(n)} : \mathcal{C}_1(H_1^{(n)}) \rightarrow \mathcal{C}_1(H_2^{(n)})$ ορίζει μια απεικόνιση $\Phi^\dagger : \mathcal{B}(H_2^{(n)}) \rightarrow \mathcal{B}(H_1^{(n)})$ από τον τύπο

$$\widetilde{\text{Tr}}(\Phi^\dagger(A)T) = \widetilde{\text{Tr}}(A\Phi(T))$$

οπότε ο προηγούμενος υπολογισμός δείχνει ότι

$$\widetilde{\text{Tr}}(\Phi^\dagger(A)T) = \widetilde{\text{Tr}}((\Psi^\dagger)^{(n)}(A)T)$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(H^{(n)})$ και $T \in \mathcal{C}_1(H^{(n)})$. Άρα $\Phi^\dagger = (\Psi^\dagger)^{(n)}$, όπως θέλαμε.

Αφού η $\Psi^\dagger$ είναι πλήρως θετική, η $\Phi^\dagger = (\Psi^\dagger)^{(n)}$ είναι θετική. Από το (2), αυτό συνεπάγεται ότι η Φ είναι θετική. Συνεπώς η $\Psi^{(n)} = \Phi$ είναι θετική. Αφού το n ήταν αυθαίρετο, δείξαμε ότι η Ψ είναι πλήρως θετική.

Αν αντίστροφα υποθέσουμε ότι η Ψ είναι πλήρως θετική, τότε για κάθε n η απεικόνιση $\Phi := \Psi^{(n)}$ θα είναι θετική, οπότε, πάλι από το (2), η $\Phi^\dagger$ θα είναι θετική. Από τον ισχυρισμό έπεται ότι η $(\Psi^\dagger)^{(n)}$ είναι θετική. Έτσι αποδείξαμε την πλήρη θετικότητα της $\Psi^\dagger$.

(4) Αν η $\Psi^\dagger$ είναι μοναδιαία και πλήρως θετική, τότε η Ψ είναι πλήρως θετική, από το (3), και επί πλέον, για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H)$ έχουμε

$$\text{Tr}(\Psi(T)) = \text{Tr}(\Psi(T)I) = \text{Tr}(T\Psi^\dagger(I)) = \text{Tr}(T)$$

άρα η Ψ είναι κβαντικό κανάλι.

Αντίστροφα, αν η Ψ είναι κβαντικό κανάλι, τότε η $\Psi^\dagger$ πλήρως θετική, από το (3), και επί πλέον, για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H)$,

$$\text{Tr}(T\Psi^\dagger(I)) = \text{Tr}(\Psi(T)I) = \text{Tr}(\Psi(T)) = \text{Tr}(T) = \text{Tr}(TI)$$

δηλαδή $\text{Tr}(T(\Psi^\dagger(I) - I)) = 0$ για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H)$, άρα (θέτοντας $T = xy^*$)

$$\langle \Psi^\dagger(I) - I, x, y \rangle = \text{Tr}(xy^*(\Psi^\dagger(I) - I)) = 0$$

για κάθε $x, y \in H_1$, οπότε $\Psi^\dagger(I) = I$. Δείξαμε ότι η $\Psi^\dagger$ είναι UCP. □

Άσκηση 4. (1) Αν $\Phi : \mathcal{B}(H_1) \rightarrow \mathcal{B}(K_1)$ είναι πλήρως θετική και H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι η

$$\Phi \otimes \text{id} : \mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(H) : \sum_i t_i \otimes T_i \mapsto \sum_i \Phi(S_i) \otimes T_i$$

επεκτείνεται σε καλά ορισμένη πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi \otimes \text{id} : \mathcal{B}(H_1 \otimes H) \rightarrow \mathcal{B}(K_1 \otimes H)$.

(2) Αν δύο απεικονίσεις

$$\Phi_1 : \mathcal{B}(H_1) \rightarrow \mathcal{B}(K_1) \quad \text{και} \quad \Phi_2 : \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(K_2)$$

(όπου $\dim H_1 \dim H_2 < \infty$) είναι πλήρως θετικές, δείξτε ότι η

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2) \rightarrow \mathcal{B}(K_1 \otimes K_2)$$

ορίζεται καλά και είναι πλήρως θετική.

Λύση Διόρθωση: Θέμα επέκτασης δεν τίθεται, εφόσον ο χώρος Hilbert H έχει πεπερασμένη διάσταση. Πράγματι, κάθε $T \in \mathcal{B}(H_1 \otimes H)$ ανήκει στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H)$. Δηλαδή $\mathcal{B}(H_1 \otimes H) = \mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H) \simeq M_n(\mathcal{B}(H_1))$, (όπου $n = \dim H$) όπως έχουμε δείξει.

(1) Δείχνουμε ότι η $\Phi \otimes \text{id}$ είναι πλήρως θετική: Εδώ $\text{id} : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(H)$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Την συμβολίζουμε id_n αφού $n = \dim H$. Έστω $m \in \mathbb{N}$, να δείξουμε ότι η

$$(\Phi \otimes \text{id}_n)^{(m)} : M_m(\mathcal{B}(H_1 \otimes H)) \rightarrow M_m(\mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(H))$$

είναι θετική. Παρατηρούμε ότι η $\Phi \otimes \text{id}_n : \mathcal{B}(H_1 \otimes H) \rightarrow \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(H)$ ταυτίζεται με την απεικόνιση $\Phi^{(n)} : M_n(\mathcal{B}(H_1)) \rightarrow M_n(\mathcal{B}(K_1))$, οπότε η $(\Phi \otimes \text{id}_n)^{(m)}$ ταυτίζεται με την $(\Phi^{(n)})^{(m)} : M_m(M_n(\mathcal{B}(H_1))) \rightarrow M_m(M_n(\mathcal{B}(K_1)))$.

Όμως $(\Phi^{(n)})^{(m)} = \Phi^{(nm)}$, $M_m(M_n(\mathcal{B}(H_1))) = M_{mn}(\mathcal{B}(H_1))$ και $M_m(M_n(\mathcal{B}(K_1))) = M_{mn}(\mathcal{B}(K_1))$. Πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι η $\Phi^{(nm)} : M_{mn}(\mathcal{B}(H_1)) \rightarrow M_{mn}(\mathcal{B}(K_1))$ είναι θετική. Αυτό όμως είναι αληθές, αφού η $\Phi : \mathcal{B}(H_1) \rightarrow \mathcal{B}(K_1)$ είναι πλήρως θετική.

(2) Η απεικόνιση

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2) \simeq \mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(K_1 \otimes K_2)$$

παραγοντοποιείται ως εξής

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H_2) \xrightarrow{\Phi_1 \otimes \text{id}_{\mathcal{B}(H_2)}} \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(H_2) \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2} \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(K_2).$$

Πράγματι, για κάθε $A \in \mathcal{B}(H_1)$ και $B \in \mathcal{B}(H_2)$ έχουμε

$$((\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2) \circ (\Phi_1 \otimes \text{id}_{\mathcal{B}(H_2)}))(A \otimes B) = (\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2)(\Phi_1(A) \otimes B) = \Phi_1(A) \otimes \Phi_2(B)$$

άρα για κάθε $\sum_{i=1}^k A_k \otimes B_k \in \mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H_2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} ((\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2) \circ (\Phi_1 \otimes \text{id}_{\mathcal{B}(H_2)}))\left(\sum_{i=1}^k A_k \otimes B_k\right) &= \sum_{i=1}^k (\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2) \circ (\Phi_1 \otimes \text{id}_{\mathcal{B}(H_2)})(A_k \otimes B_k) \\ &= \sum_{i=1}^k \Phi_1(A_k) \otimes \Phi_2(B_k) \\ &= (\Phi_1 \otimes \Phi_2)\left(\sum_{i=1}^k A_k \otimes B_k\right). \end{aligned}$$

Εφόσον $\dim H_2 < \infty$, από το (1) γνωρίζουμε ότι η $\Phi_1 \otimes \text{id}_{\mathcal{B}(H_2)}$ είναι πλήρως θετική. Για την $\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2$ όμως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το (ανάλογο του) (1) γιατί ο K_1 δεν έχει υποθεθεί πεπερασμένης διάστασης. Είναι αλήθεια ότι ο γραμμικός χώρος $\Phi_2(\mathcal{B}(H_2))$ είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωρος του χώρου $\mathcal{B}(K_2)$, αφού $\dim \mathcal{B}(H_2) < \infty$. Όμως οι τελεστές που ανήκουν στον $\Phi_2(\mathcal{B}(H_2))$ δεν έχουν κατ' ανάγκη πεπερασμένη τάξη: για παράδειγμα αν η Φ_2 είναι UCP τότε $\Phi_2(I_{H_2}) = I_{K_2}$, που έχει άπειρη τάξη αν $\dim K_2 = \infty$.

Ας δείξουμε ότι η

$$\text{id}_{\mathcal{B}(K_1)} \otimes \Phi_2 : \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(K_2)$$

είναι καλά ορισμένη πλήρως θετική απεικόνιση.

Επιλέγοντας μια ο.κ. βάση του K_1 μπορούμε να τον ταυτίσουμε με τον $\ell^2(\mathbb{N})$. Παραλείποντας στη συνέχεια τους δείκτες 2 από τα Φ_2 , H_2 και K_2 , εξετάζουμε την

$$\text{id} \otimes \Phi : \mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(K).$$

Κάθε στοιχείο του $\mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H)$ ορίζει φραγμένο τελεστή $A \in \mathcal{B}(\ell^2 \otimes H)$ που με τη σειρά του δίνει έναν $\infty \times \infty$ πίνακα $[a_{ij}]$ με $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ από τον τύπο

$$\langle a_{ij}x, y \rangle_H = \langle A(e_j \otimes x), (e_i \otimes y) \rangle_{\ell^2 \otimes H} \quad x, y \in H, i, j \in \mathbb{N}.$$

Ισχυρίζομαι ότι ο $(\text{id} \otimes \Phi)(A)$ ορίζει φραγμένο τελεστή στον $\ell^2 \otimes K$ που αντιστοιχεί στον πίνακα $[\Phi(a_{ij})]$, με νόρμα το πολύ $\|\Phi\| \|A\|$.

Για να το δείξουμε, θεωρούμε πρώτα διανύσματα $\vec{x} = \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_k$ και $\vec{y} = \sum_{k=1}^n e_k \otimes y_k$ στον $c_{00} \otimes K$ και θα δείξουμε ότι

$$|\langle [\Phi(a_{ij})]\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\ell^2 \otimes K}| \leq \|\Phi\| \|A\| \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|.$$

Έχουμε

$$\langle [\Phi(a_{ij})]\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\ell^2 \otimes K} = \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(a_{ij})x_j, y_i \rangle_K.$$

Αν τώρα ονομάσουμε B_n τον $n \times n$ πίνακα $B_n = [a_{ij}]_{i,j \in [n]} \in M_n(\mathcal{B}(H))$, τότε ο $n \times n$ πίνακας τελεστών $[\Phi(a_{ij})]_{i,j \in [n]}$ (που ανήκει στον $M_n(\mathcal{B}(K))$) ισούται με $\Phi^{(n)}(B_n)$, and άρα $\|\Phi^{(n)}(B_n)\| \leq \|\Phi^{(n)}\| \|B_n\|$. Όμως, εφόσον η Φ είναι πλήρως θετική, ξέρουμε ότι $\|\Phi^{(n)}\| = \|\Phi\|$, ανεξάρτητα από το n . Και φυσικά $\|B_n\|_{M_n(\mathcal{B}(H))} \leq \| [a_{ij}] \|_{\mathcal{B}(\ell^2 \otimes H)} = \|A\|$. Έχουμε λοιπόν $\|\Phi^{(n)}(B_n)\| \leq \|\Phi\| \|A\|$ και άρα

$$\begin{aligned} |\langle [\Phi(a_{ij})]\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\ell^2 \otimes K}| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(a_{ij})x_j, y_i \rangle_K \right| \\ &= |\langle \Phi^{(n)}(B_n)\vec{x}, \vec{y} \rangle_{\ell^2 \otimes K}| \leq \|\Phi\| \|A\| \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|. \end{aligned}$$

Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι ο $\infty \times \infty$ πίνακας $[\Phi(a_{ij})]$ ορίζει τελεστή στον $c_{00} \otimes K$ που είναι συνεχής για τη νόρμα του $\ell^2 \otimes K$, και άρα επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή στον $\ell^2 \otimes K$ με νόρμα το πολύ $\|\Phi\| \|A\|$.

Δείχνουμε ότι η $\text{id} \otimes \Phi$ είναι θετική απεικόνιση: Αν $A = [a_{ij}]$ είναι θετικό στοιχείο του $\mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H)$ (για τη διάταξη που κληρονομείται από τον $\mathcal{B}(\ell^2 \otimes H)$), τότε θέτοντας $\vec{y} = \vec{x} \in c_{00} \otimes K$ στον προηγούμενο υπολογισμό έχουμε

$$\langle [\Phi(a_{ij})]\vec{x}, \vec{x} \rangle_{\ell^2 \otimes K} = \langle \Phi^{(n)}(B_n)\vec{x}, \vec{x} \rangle_{\ell^2 \otimes K} \geq 0$$

αφού ο τελεστής B_n είναι θετικός και η $\Phi^{(n)}$ διατηρεί την θετικότητα. Τέλος, αν $\vec{x} = \sum_{k=1}^\infty e_k \otimes x_k \in \ell^2 \otimes K$ είναι αυθαίρετο και θέσουμε $\vec{x}_n = \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_k \in c_{00} \otimes K$ τότε, εφόσον τώρα ξέρουμε ότι ο $[\Phi(a_{ij})]$ είναι φραγμένος τελεστής,

$$\langle [\Phi(a_{ij})]\vec{x}, \vec{x} \rangle_{\ell^2 \otimes K} = \lim_n \langle [\Phi(a_{ij})]\vec{x}_n, \vec{x}_n \rangle \geq 0$$

που δείχνει ότι η $\text{id} \otimes \Phi$ είναι θετική απεικόνιση.

Η απόδειξη ότι η $\text{id} \otimes \Phi$ είναι πλήρως θετική είναι στην ουσία η ίδια:

Έστω $m \in \mathbb{N}$, πρέπει να δείξουμε ότι η $(\text{id} \otimes \Phi)^{(m)}$ είναι θετική. Όμως η απεικόνιση αυτή δεν είναι άλλη από την

$$\text{id}_m \otimes (\text{id} \otimes \Phi) : \mathcal{B}(\ell^2[m]) \otimes (\mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(H)) \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2[m]) \otimes (\mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(H)).$$

Από την προσεταιριστικότητα του (αλγεβρικού) τανυστικού γινομένου, η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφεί

$$(\text{id}_m \otimes \text{id}) \otimes \Phi : (\mathcal{B}(\ell^2[m]) \otimes \mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N})) \otimes \mathcal{B}(H) \rightarrow (\mathcal{B}(\ell^2[m]) \otimes \mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N})) \otimes \mathcal{B}(H).$$

Όμως ο $\mathcal{B}(\ell^2[m]) \otimes \mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N})$ ταυτίζεται με τον $\mathcal{B}((\ell^2(\mathbb{N}))^m)$ που φυσικά δεν είναι άλλος από τον $\mathcal{B}(\ell^2(\mathbb{N}))$ και η $\text{id}_m \otimes \text{id}$ δεν είναι άλλη από την id . Έτσι, αυτό που πρέπει να δειχθεί είναι ότι η

$$\text{id} \otimes \Phi : \mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2\mathbb{N}) \otimes \mathcal{B}(H)$$

είναι θετική, πράγμα που ήδη έχουμε δείξει.

(Αν ήθελε κανείς να είναι εντελώς τυπικός, θα έπρεπε να θεωρήσει διανύσματα της μορφής $\vec{x} = \sum_{k=1}^n e_k \otimes x_k$ όπου τώρα η $\{e_k\}$ είναι ο.κ. βάση του $(\ell^2(\mathbb{N}))^m$ και τελεστές $A \in \mathcal{B}((\ell^2)^m \otimes H)$ που δίνουν $\infty \times \infty$

πίνακες $[a_{ij}]$ με $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$ ως προς αυτήν τη βάση, οπότε ο $(\text{id}_m \otimes \text{id} \otimes \Phi)(A)$ αντιστοιχεί στον πίνακα $[\Phi(a_{ij})]$ (με $a_{ij} \in \mathcal{B}(H)$) ως προς αυτήν τη βάση. Όμως τα επιχειρήματα είναι τα ίδια.)

Σχόλιο Παρατηρείστε ότι στην απόδειξη αυτή δεν χρησιμοποιήθηκε πουθενά ότι ο χώρος H έχει πεπερασμένη διάσταση. Επομένως το συμπέρασμα ισχύει για οποιαδήποτε πλήρως θετική $\Phi : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K)$ όπου H, K χώροι Hilbert.

Μια απλούστερη απόδειξη Θεωρούμε την

$$\text{id} \otimes \Phi : \mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(K).$$

Αφού η Φ είναι CP, από το Θεώρημα Stinespring υπάρχει μια αναπαράσταση (π, H_π) του $\mathcal{B}(H)$ και ένας φραγμένος γραμμικός τελεστής $V : K \rightarrow H_\pi$ ώστε για κάθε $B \in \mathcal{B}(H)$ να ισχύει η

$$\Phi(B) = V^* \pi(B) V.$$

Έπεται ότι για κάθε $A \otimes B \in \mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H)$ έχουμε

$$(\text{id} \otimes \Phi)(A \otimes B) = A \otimes \Phi(B) = A \otimes V^* \pi(B) V$$

που είναι (όπως ξέρουμε) φραγμένος τελεστής στον $\ell^2 \otimes K$. Έχουμε λοιπόν

$$(\text{id} \otimes \Phi)(A \otimes B) = A \otimes V^* \pi(B) V = (I \otimes V^*)(A \otimes \pi(B))(I \otimes V)$$

και άρα λόγω γραμμικότητας

$$(\text{id} \otimes \Phi)\left(\sum_k A_k \otimes B_k\right) = (I \otimes V^*)(\text{id} \otimes \pi)\left(\sum_k A_k \otimes B_k\right)(I \otimes V)$$

οπότε μένει να δείξουμε ότι η $\text{id} \otimes \pi$, που είναι ορισμένη στο αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $\mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H)$ είναι πλήρως θετική για τη διάταξη που κληρονομείται από τον $\mathcal{B}(\ell^2 \otimes H)$ (γιατί τότε η σύνθεση $\text{Ad}(I \otimes V) \circ (\text{id} \otimes \pi)$ θα είναι πλήρως θετική).

Εύκολα φαίνεται ότι η $\text{id} \otimes \pi$ είναι *-ομομορφισμός στην $\mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H)$. Επίσης, επειδή ο H έχει υποτεθεί πεπερασμένης διάστασης, έχουμε $\mathcal{B}(\ell^2) \otimes \mathcal{B}(H) \simeq M_k(\mathcal{B}(\ell^2))$ όπου $k = \dim H$. Συνεπώς η $\text{id} \otimes \pi$ είναι *-ομομορφισμός ορισμένος σε μια C*-άλγεβρα, και άρα είναι πλήρως θετική απεικόνιση, όπως θέλαμε.