

Άσκηση 1. Έστω $f \in L^1([0, 1])$. Ορίζουμε, για κάθε $g \in C([0, 1])$,

$$\omega_f(g) := \int g(t)f(t)dt.$$

Δείξτε ότι η $\omega_f : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή και ότι $\|\omega_f\| = \|f\|_1$.

Δείξτε επίσης ότι η ω_f είναι θετική γραμμική μορφή αν και μόνον αν $\|\omega_f\| = \omega_f(\mathbf{1})$ (όπου $\mathbf{1}(t) = 1$ για κάθε $t \in [0, 1]$), ισοδύναμα, αν η f παίρνει σ.π. μη αρνητικές τιμές, καθώς και ότι η ω_f είναι κατάσταση αν και μόνον αν η f είναι κατανομή πιθανότητας.

Άσκηση 2. Έστω $T \in \mathcal{C}_1(H)$ (H χώρος Hilbert). Ορίζουμε, για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$,

$$\omega_T(A) := \text{Tr}(AT).$$

Έχουμε δείξει ότι η $\omega_T : \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathbb{C}$ είναι συνεχής γραμμική μορφή και ότι $\|\omega_T\| = \|T\|_1$.

Δείξτε ότι η ω_T διατηρεί την ενέλιξη (δηλ. $\omega_T(A^*) = \omega_T(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$) αν και μόνον αν $T = T^*$. Δείξτε επίσης ότι η ω_T είναι θετική γραμμική μορφή αν και μόνον αν $\|\omega_T\| = \omega_T(I)$, ισοδύναμα, αν $T \geq 0$. Δείξτε ότι η ω_T είναι κατάσταση αν $T \geq 0$ και $\text{Tr}(T) = 1$.

Άσκηση 3. Έστω $\Psi : \mathcal{C}_1(H_1) \rightarrow \mathcal{C}_1(H_2)$ γραμμική. Λέμε ότι η Ψ διατηρεί την ενέλιξη όταν $\Psi(T)^* = (\Psi(T))^*$ για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H_1)$. Λέμε ότι η Ψ είναι θετική όταν $\Psi(T) \geq 0$ για κάθε $T \in \mathcal{C}_1(H_1)^+$. Λέμε ότι η Ψ είναι πλήρως θετική ($T \in CP$) όταν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $\Psi^{(n)} : [T_{ij}] \mapsto [\Psi(T_{ij})]$ στέλνει θετικούς $[T_{ij}] \in \mathcal{C}_1(H_1^n)^+$ σε θετικούς $[\Psi(T_{ij})] \in \mathcal{C}_1(H_2^n)^+$. Η Ψ λέγεται κβαντικό κανάλι όταν είναι πλήρως θετική και διατηρεί το ίχνος ($\Psi \in CPTP$).

Αν $\Psi : \mathcal{C}_1(H_1) \rightarrow \mathcal{C}_1(H_2)$ είναι γραμμική και συνεχής, δείξτε ότι ορίζεται μια γραμμική απεικόνιση

$$\Psi^\dagger : \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(H_1)$$

από τη σχέση

$$\text{Tr}(\Psi^\dagger(A)T) = \text{Tr}(A\Psi(T)) \quad A \in \mathcal{B}(H_2), T \in \mathcal{C}_1(H_1)$$

(εξηγήστε γιατί υπάρχει φραγμένος τελεστής $\Psi^\dagger(A)$ που ικανοποιεί τη σχέση αυτή).

Δείξτε ότι

1. Η απεικόνιση $\Psi^\dagger$ διατηρεί την ενέλιξη αν η Ψ διατηρεί την ενέλιξη.
2. Η $\Psi^\dagger$ είναι θετική αν η Ψ είναι θετική.
3. Η $\Psi^\dagger$ είναι πλήρως θετική αν η Ψ είναι πλήρως θετική.
4. Η $\Psi^\dagger$ είναι UCP (μοναδιαία και πλήρως θετική) αν η Ψ είναι κβαντικό κανάλι.

Άσκηση 4. (1) Αν $\Phi : \mathcal{B}(H_1) \rightarrow \mathcal{B}(K_1)$ είναι πλήρως θετική και H χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης, δείξτε ότι η

$$\Phi \otimes \text{id} : \mathcal{B}(H_1) \otimes \mathcal{B}(H) \rightarrow \mathcal{B}(K_1) \otimes \mathcal{B}(H) : \sum_i S_i \otimes T_i \mapsto \sum_i \Phi(S_i) \otimes T_i$$

επεκτείνεται σε καλά ορισμένη πλήρως θετική απεικόνιση $\Phi \otimes \text{id} : \mathcal{B}(H_1 \otimes H) \rightarrow \mathcal{B}(K_1 \otimes H)$.

(2) Αν δύο απεικονίσεις

$$\Phi_1 : \mathcal{B}(H_1) \rightarrow \mathcal{B}(K_1) \quad \text{και} \quad \Phi_2 : \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(K_2)$$

(όπου $\dim H_1 \dim H_2 < \infty$) είναι πλήρως θετικές, δείξτε ότι η

$$\Phi_1 \otimes \Phi_2 : \mathcal{B}(H_1 \otimes H_2) \rightarrow \mathcal{B}(K_1 \otimes K_2)$$

ορίζεται καλά και είναι πλήρως θετική.