

Άσκηση 1. Ένας φραγμένος τελεστής $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ μεταξύ χώρων Hilbert λέγεται Hilbert-Schmidt αν ο A^*A είναι τελεστής ίχνους ($|A|^2 \in \mathcal{C}_1(H_1)$). Γράφουμε $A \in \mathcal{C}_2(H_1, H_2)$ και θέτουμε $\|A\| := \text{Tr}(A^*A)^{1/2}$. Δείξτε ότι

1. Αν $A \in \mathcal{C}_1(H_1, H_2)$ τότε $A \in \mathcal{C}_2(H_1, H_2)$ αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει σε απειροδιάστατους χώρους.
2. Αν $A \in \mathcal{C}_1(H_1, H_2)$ τότε $\|A\|_1 \geq \|A\|_2 \geq \|A\|_{op}$.
3. Ένας $A \in \mathcal{B}(H)$ είναι Hilbert-Schmidt αν και μόνον αν υπάρχουν $B \in \mathcal{C}_1(H)$ και $C \in \mathcal{C}_1(H)$ ώστε $A = BC$.
4. Ο χώρος $(\mathcal{C}_2(H_1, H_2), \|\cdot\|_2)$ είναι χώρος Hilbert, και οι (φραγμένοι) τελεστές πεπερασμένης τάξης είναι πυκνός υπόχωρος του $(\mathcal{C}_2(H_1, H_2), \|\cdot\|_2)$.
5. Αν $A \in \mathcal{B}(H_2)$ και $B \in \mathcal{B}(H_1)$, τότε για κάθε $X \in \mathcal{C}_2(H_1, H_2)$ έχουμε $AXB \in \mathcal{C}_2(H_1, H_2)$ και $\|AXB\|_2 \leq \|A\| \|X\|_2 \|B\|$. Ειδικότερα ο τελεστής $L_A : X \mapsto AX$ καθώς και ο $R_B : X \mapsto XB$ είναι φραγμένοι τελεστές $\mathcal{C}_2(H_1, H_2) \rightarrow \mathcal{C}_2(H_1, H_2)$.
6. Η απεικόνιση $L : \mathcal{B}(H_2) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}_2(H_1, H_2)) : A \mapsto L_A$ είναι πιστή αναπαράσταση της C^* άλγεβρας $\mathcal{B}(H_2)$ στον χώρο Hilbert $\mathcal{C}_2(H_1, H_2)$. Τι μπορείτε να πείτε για την απεικόνιση $R : \mathcal{B}(H_1) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{C}_2(H_1, H_2)) : B \mapsto R_B$;
7. Η απεικόνιση $xy^* \mapsto x \otimes y^*$ επεκτείνεται σε γραμμική ισομετρία από τον $\mathcal{C}_2(H_1, H_2)$ επί του $H_2 \otimes_{hs} H_1^*$. Εδώ $H_1^* = \{y^* : y \in H_1\}$ είναι ο δυικός του χώρου Hilbert H_1 (όπου $y^* : H_1 \rightarrow \mathbb{C} : z \mapsto \langle z, y \rangle$).

Σημείωση: Μπορεί ίσως να βοηθήσει η ειδική περίπτωση $H_1 = H_2 = \ell^2(\mathbb{N})$ και η παρατήρηση ότι η περίπτωση $H_1 = H_2 = \ell^2([n])$ έχει ήδη μελετηθεί στο προηγούμενο φυλλάδιο...

Άσκηση 2. Δείξτε ότι ένας φραγμένος τελεστής $V \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ μεταξύ χώρων Hilbert είναι μερική ισομετρία αν και μόνον αν $VV^*V = V$. Δείξτε ότι τότε οι $Q := VV^*$ και $P := V^*V$ είναι προβολές και η V απεικονίζει τον χώρο $P(H_1)$ ισομετρικά επί του $Q(H_2)$.

Δείξτε ότι αν $A = V|A|$ είναι η πολική αναπαράσταση ενός τελεστή $A \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ (όπου V μερική ισομετρία με $\ker V = \ker A$), τότε $|A| = V^*A$.

Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια C^* άλγεβρα με $I_H \in \mathcal{A}$. Θα λέμε ότι δυο προβολές $P, Q \in \mathcal{A}$ είναι ισοδύναμες (κατά Murray - von Neumann) αν υπάρχει $V \in \mathcal{A}$ ώστε $Q := VV^*$ και $P := V^*V$. Γράφουμε $P \sim Q$. Δείξτε ότι η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των προβολών της $\mathcal{A}$.

Εξετάστε πώς περιγράφεται η σχέση $\sim$ στις ειδικές περιπτώσεις

(α) $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$ και

(β) $\mathcal{A}$ η άλγεβρα των διαγωνίων πινάκων στον $H = \ell^2$.