

Άσκηση 1. Δείξτε ότι ο χώρος $M_n(\mathbb{C})$ γίνεται χώρος Hilbert αν εφοδιασθεί με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle A, B \rangle_{22} := \text{Tr}(B^* A), \quad A, B \in M_n(\mathbb{C}).$$

Βρείτε μια γραμμική ισομετρία $(M_n(\mathbb{C}), \|\cdot\|_{22}) \rightarrow (\ell^2([n^2]), \|\cdot\|_2)$ (όπου $\|A\|_{22} = \sqrt{\text{Tr}(A^* A)}$). Δείξτε ότι, αν $\|A\|_{op}$ συμβολίζει τη νόρμα ενός $A \in M_n(\mathbb{C})$ ως τελεστή στον $\ell^2([n])$, υπάρχει μια σταθερά $c_n > 0$ ώστε

$$\|A\|_{op} \leq \|A\|_{22} \leq c_n \|A\|_{op} \quad \text{για κάθε } A \in M_n(\mathbb{C})$$

και προσδιορίστε την βέλτιστη τιμή της σταθεράς c_n .

Άσκηση 2. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $F \subseteq E$ γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του F , δείξτε ότι ο τελεστής

$$P := \sum_{k=1}^n x_k x_k^* : E \rightarrow E$$

είναι η ορθή προβολή του E στον F .

Εξηγήστε αν μπορούμε με ανάλογο τρόπο να ορίσουμε την προβολή όταν ο F δεν έχει πεπερασμένη διάσταση.

Άσκηση 3. Ο χώρος του Hardy H^2 αποτελείται από όλες τις δυναμοσειρές $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ που ικανοποιούν $\sum_k |a_k|^2 < \infty$ (παρατηρείστε ότι μια τέτοια δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $|z| < 1$). Αν επίσης $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in H^2$, θέτουμε $\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \bar{b}_k$. Αποδείξτε ότι η οικογένεια $\{\zeta_k : k \in \mathbb{Z}_+\}$ όπου $\zeta_k(z) = z^k, k = 0, 1, \dots$ είναι ορθοκανονική βάση του H^2 . Να συμπεράνετε ότι ο H^2 είναι χώρος Hilbert.

Αν $|w| < 1$, δείξτε ότι η $\phi_w : f \mapsto f(w)$ είναι γραμμική μορφή στον H^2 και είναι συνεχής.

Βρείτε την (μοναδική) $k_w \in H^2$ που ικανοποιεί $\langle f, k_w \rangle = \phi_w(f)$ για κάθε $f \in H^2$.

Άσκηση 4. Αν H είναι χώρος Hilbert, για κάθε $x \in H$ ορίσαμε την απεικόνιση $f_x : H \rightarrow \mathbb{C} : y \mapsto \langle y, x \rangle$. Βρείτε τον συζυγή τελεστή της f_x .

Άσκηση 5. Αν $T \in \mathcal{B}(H)$ είναι αυτοσυζυγής τελεστής σ' έναν χώρο Hilbert, δείξτε ότι $\|T^2\| = \|T\|^2$ και ότι $\|T^3\| = \|T\|^3$.

Με ένα παράδειγμα δείξτε ότι οι ισότητες αυτές δεν ισχύουν κατ' ανάγκη για μη αυτοσυζυγείς τελεστές. Δείξτε όμως ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}(H)$ ισχύει $\|AA^*A\| = \|A\|^3$.

Υπόδειξη: Υψώστε στο τετράγωνο...

Άσκηση 6. Έστω E χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $F \subseteq E$ γραμμικός υπόχωρος πεπερασμένης διάστασης. Αν $\{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του F , δείξτε ότι ο τελεστής

$$P := \sum_{k=1}^n x_k x_k^* : E \rightarrow E$$

είναι η ορθή προβολή του E στον F .

Εξηγήστε αν μπορούμε με ανάλογο τρόπο να ορίσουμε την προβολή όταν ο F δεν έχει πεπερασμένη διάσταση.

Άσκηση 7. Αν $x, y \in c_{00}$, βρείτε τον πίνακα του τελεστή $xy^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$ ως προς τη συνηθισμένη βάση του ℓ^2 .

Άσκηση 8. Στον χώρο $L^2([0, 1])$ θεωρούμε τον τελεστή M με $(Mf)(t) = tf(t)$ ($f \in C([0, 1])$). Ο M δεν έχει ιδιοτιμές. Θυμίζουμε ότι είναι αυτοσυζυγής.