Καλημέρα 19/10/21

Άσκ. 1 $M_n(\mathbb{C})$

$$\langle A, B\rangle_{22} = Tr(B^*A)$$

• εσωτ. γινόμενο $(M_n(\mathbb{C}), \|\ \|_{22})$: Hilbert

• γραμμ. ~~ως προς~~ $A \mapsto Tr(B^*A)$ γραμμ. $\forall B$

• $B \mapsto Tr(B^*A) = \overline{Tr(A^*B)}$ αντιγραμμική $\forall A$

• $\langle B, A\rangle = Tr(A^*B) = \overline{Tr(B^*A)} = \overline{\langle A, B\rangle}$

ερμιτ.

• $\langle A, A\rangle = Tr(A^*A) \geq 0$ $A^*A \in M_n(\mathbb{C})_+$

• αν $\langle A, A\rangle = 0 \Rightarrow Tr(A^*A) = 0$

$$\Downarrow ?$$

$$A = 0$$

$Tr(\cancel{X}) = \Sigma$ ιδιοτιμών του X

$A^*A \geq 0$ ιδιοτιμές ≥ 0

$Tr(A^*A) = 0$: όλες οι ιδιοτ. $= 0$

$\Rightarrow A^*A = 0 \Rightarrow A = 0$

$A = [a_{ij}]$

$A^*A = [\underbrace{\sum_k \bar{a}_{ki} a_{kj}}_{b_{ij}}]$

$A^* = [\bar{a}_{ji}]$

$$Tr(A^*A) = \sum_i b_{ii} = \sum_i \sum_k \bar{a}_{ki} a_{ki} = \sum_{i,k} |a_{ki}|^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$|a_{ik}| = 0$ $\forall i, k$

$A = [a_{ij}]$

$A^* = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$

$A^*A = [\sum_k b_{ik} a_{kj}] = [\sum_k \bar{a}_{ki} a_{kj}]$

(β) $V : (M_n(\mathbb{C}), \| \ \|_{22}) \to \ell^2[n^2]$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \ \|_{op}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\mathbb{C}^{n^2}, \| \ \|_2)$

$$V : \underset{A =}{[a_{ij}]} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad b_i = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ b_{in} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{V} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_{22}^2 = Tr(A^*A) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2$$

$$\|V(A)\|^2_{\ell^2[n^2]} = \sum_{k=1}^n \|b_k\|^2_{\ell^2[n]} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n |a_{ki}|^2 \right)$$

$$\Rightarrow \|A\|_{22} = \|V(A)\|_{\ell^2[n^2]}$$

Βρες σταθερα C_n : $\forall A \in M_n(\mathbb{C}) = B(\ell^2[n])$

$$\|A\|_{op} \overset{(i)}{\le} \|A\|_{22} \overset{(ii)}{\le} C_n \|A\|_{op}$$

↑ εξαρταται μονο απ'το n οχι απ'την A

(i) : $\forall x \in \ell^2[n]$

$$\|Ax\|_2^2 = \left\| \sum_{j=1}^n \langle x, e_j \rangle A e_j \right\|_2^2 =$$

$$\overset{\Delta}{\le} \left(\sum_j |\langle x, e_j \rangle| \, \|Ae_j\| \right)^2$$

$$\overset{CS}{\le} \left(\sum_j |\langle x, e_j \rangle|^2 \right) \left(\sum_j \|\underbrace{Ae_j}_{b_j}\|_2^2 \right)$$

$$= \|x\|_2^2 \sum_j \sum_i |a_{ij}|^2$$

Παιρνε sup ως προς $x \in \ell^2$ $\|x\|_2 \le 1$

$$\|A\|_{op}^2 \le \sum_{ij} |a_{ij}|^2 = \|A\|_{22}^2$$

$$\|A\|_{22}^2 = \sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|_{\ell^2[n]}^2$$

$$\le n \max \|Ae_j\|_2^2$$

$$\le n\|A\|^2 \|e_j\|_2^2 = n\|A\|^2$$

$$\Downarrow$$

$$\|A\|_{22} \le \sqrt{n}\,\|A\|_{op} \quad \forall A \in M_n(\mathbb{C})$$

Βέλτιστη: $A = I$ $\quad \|A\|_{op} = 1$

$$A^*A = I$$

$$\|A\|_{22}^2 = Tr(A^*A) = n$$

$$\|A\|_{22} = \sqrt{n} \quad \checkmark$$

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$

$\langle A, B \rangle = Tr(B^*A)$ εσωτ. γιν.

$$\Downarrow$$

Cauchy–Schwartz:

$$|Tr(B^*A)| \le \left(Tr(A^*A)\right)^{1/2} \left(Tr(B^*B)\right)^{1/2}$$

Υπάρχει Hölder: $\forall p \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$|Tr(B^*A)| \le Tr\left((A^*A)^{p/2}\right)^{1/p} Tr\left((B^*B)^{q/2}\right)^{1/q}$$

(απόδειξη εκτός ύλης παραλείπεται)

Άσκ 2 $(E; \langle \cdot, \cdot \rangle)$, $F \subseteq E$ γραμμ υπόχ

$\{x_1 \dots x_n\} \subseteq F$ ορθοκανονική βάση

(i) $P = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k^*$: ορθή προβ. στο F

προφανώς γραμμική

$$x_k x_k^*(x) = \langle x, x_k \rangle x_k$$

Αν $x \in F$

τότε $x = \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$

$$\underline{P}(x) = \sum_j \langle x, x_j \rangle P(x_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j = x$$

Αν $y \perp F$ τότε $x_k x_k^*(y) = \langle y, x_k \rangle x_k$ $k = 1 \dots n$

$= 0$

άρα $P(y) = 0$

ορθή προβολή στο F

(γεωμετρική)

Άλλιώς $P^2 = P$, $P^* = P$: προβολή (αλγεβρική)

$$P^2 = \sum x_k x_k^* \sum x_j x_j^* = \sum_{k,j} \underbrace{\langle x_j, x_k \rangle}_{\delta_{jk}} x_k x_j^*$$

$$= \sum_k x_k x_k^* = P$$

$P = P^*$ διότι $(x_k x_k^*)^* = x_k x_k^*$ $\forall k$

Μπορώ να τη γράψω την P

με ανάλογο τρόπο όταν $\dim F = +\infty$

- Ναι μπορώ:

$$F = \text{span}\{x_i : i \in I_2\}$$

ΓΡΑΜΜ

$$E = \text{span}\{\underline{x_i} : i \in \underline{I_1 \cup I_2}\}$$

$\forall x \in E \quad \exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ ώστε

$$x = \sum_{i \in I_1} \lambda_i x_i + \sum_{i \in I_2} \lambda_i x_i$$

ορίζω $K_1 = \{ i \in I_1 : \lambda_i \neq 0 \}$ πεπερ.

$K_2 = \{ i \in I_2 : \lambda_i \neq 0 \}$ ››

$$x = \sum_{i \in K_1} \lambda_i x_i + \sum_{i \in K_2} \lambda_i x_i$$

κάνω ορθοκανονικοποίηση

και ορίζω:

$$\cancel{P = \sum_{i \in K_1} x_i x_i^*} \leftarrow \|P\| = 1$$

↑ K_1 εξαρτάται από το x

δεν έχει νόημα γραμμική απεικόνιση P

αλλά θέλω: ορίζω

$$P(x) = \sum_{i \in K_1} \lambda_i x_i$$

Δεν υπάρχει προβολή στον F όταν δεν είναι πλήρης

Αντιπαράδειγμα: $E = (c_{00}, \langle\ ,\ \rangle$ του $\ell^2)$

$$F = \{ x \in E : \sum \tfrac{1}{n} x(n) = 0 \}$$

Κοιτάω $x = e_1 = (1, 0, \ldots)$

$\neq 0$

$x \notin F$

$\nexists\ P(x) \in F$ ώστε $\|x - P(x)\| = \mathrm{dist}(x, F)$

ώστε $\underbrace{x - Px}_{y_x} \perp F$

$y_x \perp F$ σημαίνει $\forall z \in F$ να ισχύει $\langle z, y_x \rangle = 0$

παίρνω τώρα το $z_n = e_1 - n e_n$

$= (1, 0, \dots, 0, -n, 0, \dots)$

n θέση

$z_n \in F$

$\langle z_n, y_x \rangle = 0$

$\langle e_1 - n e_n, y_x \rangle = 0$

δηλ. $y_x(1) - n\, y_x(n) = 0 \quad \forall n$

$\Rightarrow \forall n,\ y_x(n) = \frac{1}{n} y_x(1)$

όμως $y_x \in E = c_{00}$

θα έπρεπε ~~......~~ το $y_x(n)$ να μηδενίζεται τελικά $\Rightarrow y_x(1) = 0$

$\Rightarrow y_x = 0$

$y_x = x - P(x) \Longrightarrow x = P(x) \in F$ άτοπο

$e_1 = x \notin F$

<u>Πρόταση</u> Σε χώρο ~~ευκλείδειο~~ <u>Hilbert</u> H ορίζουμε ON <u>ΒΑΣΗ</u>

$\{e_i : i \in I\}$

(i) ορθοκανονική $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

(ii) μεγιστική ως προς αυτή την ιδιότητα

$\Updownarrow$

$\forall x \in H \ \lim_{F \subseteq I} \left(\sum_{j \in F} \langle x, e_j \rangle e_j \right) = x$

F πεπερ. συγκλίνουσα <u>σειρά</u>

$\|x\|^2 = \sum |\langle x, e_j \rangle|^2$

ΔΕΝ ΙΣΧΥΕΙ

$x \in \operatorname{span}\{e_j : j \in I\}$

πχ στο ℓ^2, $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ είναι ON βάση όχι αλγεβρ. βάση

$\operatorname{span}\{e_j : j \in \mathbb{N}\} = c_{00}$

Ασκ 4 H : Hilbert

$f_x : H \longrightarrow \mathbb{C}$ γραμμ.

$y \longmapsto \langle y, x \rangle$ συνεχής

$f_x^* : (\mathbb{C}, |\,|) \longrightarrow H$

$= \ell^2[1]$

~~$\forall y \in H$~~ $\langle f_x^*(\lambda), y \rangle_H \overset{op}{=} \langle \lambda, f_x(y) \rangle_{\mathbb{C}}$

$= \lambda \overline{f_x(y)}$

$= \lambda \overline{\langle y, x \rangle}$

$= \lambda \langle x, y \rangle$

$\Rightarrow$

$\langle f_x^*(\lambda), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle \quad \forall y$

$\Downarrow \; f_x^*(\lambda) = \lambda x \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$

Άσκ 5 $\quad \|AA^*A\| = \|A\|^3 \quad \forall A \in B(H)$

(Θυμηθείτε: $\|B^*B\| \overset{C^*}{=} \|B\|^2$)

Απόδ $\quad \|AA^*A\|^2 = \|(AA^*A)^*(AA^*A)\|$

$$= \|(A^*AA^*)(AA^*A)\|$$

$$= \|(A^*A)^3\| \overset{?}{=} \|A^*A\|^3 \overset{C^*}{=} \|A\|^6$$

funct calc.

$\forall p$ πολυώνυμο! $\forall B = B^* \in B(H)$

$$\|p(B)\| = \sup\{|p(\lambda)| : \lambda \in \sigma(B)\}$$

Εφαρμόζω για $B = A^*A \quad p(\lambda) = \lambda^3$

$$\|(A^*A)^3\| = \sup\{|\lambda^3| : \lambda \in \sigma(A^*A)\}$$

$$\sigma(A^*A) \subseteq [0, \|A^*A\|]$$

$$\leq \|A^*A\|^3$$

ον

$$\leq (\|A^*\|\,\|A\|)^3$$

$$= \|A\|^6$$

Η Ισότητα $\|T^2\| = \|T\|^2$

$\|T^3\| = \|T\|^3$ αποτυγχάνουν για $T \neq T^*$

πχ $\quad T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

έχει $\|T\| = 2$ αλλά $T^2 = T^3 = 0$

Άσκ 7 $x, y \in c_{00}$, βρείτε τον πίνακα του $xy^* \in \mathcal{B}(\ell^2)$

Απόδ $\forall\, z \in \ell^2$,

$$xy^*(z) = \langle z, y\rangle x = \sum_n z(n)\overline{y(n)}$$

$y \in c_{00}$ άρα $y(n) = 0$ $\forall n > n_y$

$$= \sum_{n=1}^{n_y} z(n)\overline{y(n)}$$

αν $A = xy^*$ να βρω

$$\underline{a_{ij}} = \langle Ae_j, e_i\rangle = \langle \langle e_j, y\rangle x, e_i\rangle$$

$$= \langle e_j, y\rangle \langle x, e_i\rangle$$

$$= \overline{\langle y, e_j\rangle}\langle x, e_i\rangle$$

$$= \underline{\overline{y(j)}\, x(i)}$$

Άσκηση Στο χώρο $L^2([0,1])$
θεωρούμε τον τελεστή $M \in B(L^2([0,1]))$

με $(Mf)(t) = t f(t)$ $\forall f \in C[0,1]$
δείξτε ότι $\nexists$ ιδιοτιμές

Απόδ. Θεωρούμε τον τελεστή

$$M_0 : C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$$
$$f \longrightarrow M_0 f$$

$$(M_0 f)(t) = t f(t)$$

αν $\lambda \in \mathbb{C}$ με

$M_0 f = \lambda f$ για κάποια f

$t f(t) = \lambda f(t)$ $\forall t \in [0,1]$

$f(t) = 0$ $\forall t \neq \lambda$

$\Downarrow$ αφού f συνεχής

$f = 0$

$\nexists$ ιδιοδιανύσματα για το M_0
στον $C[0,1]$

$$M : L^2([0,1]) \longrightarrow L^2([0,1])$$

$Mf = f_1 f$ $\forall f \in L^2([0,1])$
όπου $f_1(t) = t$ $\forall t \in [0,1]$
$f_1 \in C([0,1]) \subseteq L^2([0,1])$

αν $\exists \lambda \in \mathbb{C}$ $\exists f \in L^2$

$Mf = \lambda f$ στο L^2

$\Longrightarrow f = 0$ του L^2

ως προς Lebesgue

$Mf(t) = \lambda f(t)$ σχεδόν $\forall t \in [0,1]$
δηλ. ισοδύναμα

$(t - \lambda) f(t) = 0$ σχεδόν $\forall t$

??

$f = 0$ του L^2 δηλ. $f(t) = 0$ σχεδόν $\forall t$

$(t-\lambda)f(t)=0$ σχ $\forall t$

$m(\{t\in[0,1] : (t-\lambda)f(t)\neq 0\})=0$

αλλά $\{t\in[0,1] : t=\lambda\}=\{\lambda\}$

έχω $m(\{\lambda\})=0$

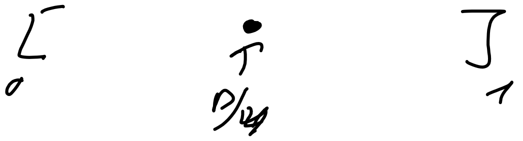
$\Downarrow$

$m(\{t\in[0,1],\ t\neq\lambda,\ (t-\lambda)f(t)=0\})=0$

άρα $m(\{t\in[0,1] : f(t)=0\})$

$\Rightarrow f=0$ σχεδόν παντού άρα $f=0$ στο L^2

$L^2([0,1],\nu)$ $\quad \nu(E)=\begin{cases} m(E), & 1/2\notin E \\ m(E)+\frac{\pi}{4}, & 1/2\in E \end{cases}$



τότε ο M_t σε αυτό το L^2

έχει ιδιοτιμή το $\lambda=\frac{1}{2}$

με ιδιοδιάνυσμα

$$f(t)=\begin{cases} 0, & t\neq 1/2 \\ 1, & t=1/2 \end{cases} \in L^2(\nu)$$

$$\|f\|^2=\int_0^1 |f|^2 d\nu = |f(1/2)|^2$$

Ασκ 3 H^2 αποτελείται από τις f με ΑΣ

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (*)$$

με $\sum |a_n|^2 < +\infty$ δηλ $(a_n)\in \ell^2$

ορίζω $g(z)=\sum b_n z^n$

$$\langle f,g\rangle = \sum a_n \overline{b_n} \quad (**)$$

δηλ αν V είναι η απεικόνιση

$$\ell^2(\mathbb{Z}_+) \longrightarrow H^2$$
$$(a_n) \longrightarrow f \text{ από } (*)$$

προφανώς γραμμική, 1-1, επί

δηλ έχω εφοδιάσει τον H^2 με τη νόρμα του ℓ^2

$$\|f\|_{H^2} = \|V^{-1}(f)\|_{\ell^2}$$

και $\langle f,g\rangle_{H^2} = \langle V^{-1}(f), V^{-1}(g)\rangle_{\ell^2}$

$$(\ell^2(\mathbb{Z}_+), \|\ \|_2) \longrightarrow (H^2, \|\ \|_{H^2})$$

εκ κατασκευής ισομετρία

άρα είναι Hilbert

και αφού η $\{e_n : n\in\mathbb{Z}_+\}$ $e_0=(1,0,\dots)$, $e_1=(0,1,0,\dots)$ κλπ

είναι ΟΚ βάση του $\ell^2(\mathbb{Z}_+)$

Έπεται ότι η $\{V(e_n) : n\in\mathbb{Z}_+\}$ είναι ΟΚ βάση του H^2

$V(e_n)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ όπου $a_k = 0, k \neq n$
$a_n = 1$ αλλιώς

$V(e_n) = \zeta_n$ όπου $\zeta_n(z) = z^n$

<u>Επομένως</u> $\forall f \in H^2$ ισχύει

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, \zeta_n \rangle \zeta_n \quad \text{συγκλ. σειρά}$$

εννοώ:
$$\left\| f - \sum_{n=0}^{N} \langle f, \zeta_n \rangle \zeta_n \right\|_{H_2} \xrightarrow[N \to \infty]{} 0$$

$\forall w \in \mathbb{D}$: $|w| < 1$

$\varphi_w : H^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
$f \longmapsto f(w)$ πρoς φραγμένη απεικόνιση;

$$|\varphi_w(f)| = |f(w)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_k w^k \right| \overset{CS}{\leq} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{1/2}}_{\|f\|} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} |w^k|^2 \right)^{1/2}}_{\frac{1}{1-|w|^2}}$$

άρα φ_w <u>συνεχής</u>

[<u>Προσ.</u> αν $(C([0,1]), \| \ \|_2^2)$ οι συναρτήσεις $\varphi_t : f \longmapsto f(t)$ <u>όχι</u> $\| \ \|_2$ - συνεχείς]

|| Επειδή H^2 : Hilbert : <u>Riesz</u> υπάρχει
$\exists K_w \in H^2$
$$\varphi_w(f) = \langle f, K_w \rangle \quad \forall f \in H^2$$
ειδικότερα
$$\varphi_w(\zeta_n) = \langle \zeta_n, K_w \rangle$$
$$w^n = \langle \zeta_n, K_w \rangle$$

$$K_w = \sum_{n=0}^{\infty} \langle K_w, \zeta_n \rangle \zeta_n = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n \zeta_n$$
(συγκλίνει ως προς $\| \ \|_{H^2}$)

Επειδή (*) συγκλίνει σε κάθε $z \in \mathbb{D}$:

$$K_w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n e_n(z)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\bar{w} z)^n$$

αφού $|\bar{w} z| < 1$

$$= \frac{1}{1 - \bar{w} z}$$

(*): Αν $f_n, f \in H^2$: $\|f_n - f\|_{H^2} \to 0$

τότε $f_n(z) \to f(z) \quad \forall z \in \mathbb{D}$

διότι

$$\begin{array}{ccc} f_n(z) & & f(z) \\ \| & & \| \\ \varphi_z(f_n) & & \varphi_z(f) \end{array}$$

$$|\varphi_z(f_n) - \varphi_z(f)| = |\varphi_z(f_n - f)|$$

$$\leq \|\varphi_z\| \, \|f_n - f\| \to 0$$

<u>αλλιώς</u>

$$f_n(z) = \langle f_n, K_z \rangle$$

$$|f_n(z) - f(z)| = |\langle f_n - f, K_z \rangle| \overset{CS}{\leq} \|f_n - f\|_{H_2} \, \|K_z\|_2 \to 0.$$