

18/01/2022

Ασκηση IV

Ασκ 5 $M \subseteq B(H) \vee Na$, $T \in M$, $T = V|T|$
 από αναρ.

(i) $|T| \in M$

Αναλ $|T| = (T^*T)^{1/2}$

$$T^*T \in C^*(T, I)$$

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ συνεχής στο } \sigma(T^*T)$$



$$\Downarrow$$

$$\text{από } f(T^*T) = |T|$$

και είναι $\| \cdot \|$ -ομομορφισμός

και T^*T από αντιστρέφει

$$C^*(T, I) \subseteq M$$

και M είναι C^* -αλγεβρά

(ii) Υπό T αντιστρέφει. τότε V είναι unitary

$$\text{και } V \in M$$

Αναλ T αντιστρέφει $\Rightarrow T^*T$ αντιστρέφει $\Rightarrow 0 \notin \sigma(T^*T)$
 $\Rightarrow 0 \notin \sigma(f(T^*T))$

$$\Rightarrow |T| = f(T^*T) \text{ αντιστρέφει}$$

$$\text{και } T = V|T| \Rightarrow T|T|^{-1} = V$$

και V αντιστρέφει

$$\text{και } \ker V = \{0\}$$

$$\text{και } \text{range } V = H$$

και V unitary

$$V = T|T|^{-1} \text{ αν } g(x) = \frac{1}{f(x)} \text{ από } f \text{ με αντιστρέφει}$$

και $g(T^*T)$ από αντιστρέφει και T^*T

$$g(T^*T) \in C^*(T^*T, I) \subseteq C^*(T, I)$$

$$\Rightarrow V = Tg(T^*T) \in C^*(T, I) \subseteq M$$

(iii) Έστω $V \in M$ (οχι αναρ.) και $C^*(T, I)$

και υποθέτουμε: $\forall x \in H$

$$V(|T|x) = Tx$$

και $\forall$

$$\forall V \in \mathcal{M} = \mathcal{M}'' \quad \text{Ναρκ } S \in \mathcal{M}' \quad \forall \alpha \quad SV = VS$$

$$SVy = VSy \quad \forall y \in H$$

$$(i) \quad \underline{y = |T|x} \quad (x \in H)$$

$$SVy = SV|T|x = STx \stackrel{ST=TS}{=} TSx = V|T|Sx$$

$$\stackrel{S|T|=|T|S}{=} VS|T|x = VSy$$

$$\checkmark \quad (ii) \quad y \in \overline{\text{Im}(|T|)} \quad \text{Ναρκ } SVy = VSy$$

(S, V συνεχώς)

$$\checkmark \quad (iii) \quad y \in (\text{Im}(|T|))^{\perp} = \text{Ker}|T| = \text{Ker}T$$

$= \text{Ker}V$

$$Vy = 0 \Rightarrow SVy = 0 \quad (*)$$

αρκ $\text{Ker}|T|$ είναι ανεξάρτητο από S
(Ασκή) άρα $Sy \in \text{Ker}T = \text{Ker}V$
αρκ $VSy = 0 \quad (**)$

$$\Rightarrow SVy = VSy$$

$$\forall y \in H : y = y_1 + y_2 \Rightarrow SVy = VSy$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $(\text{Im}(|T|))^{\perp} \quad ()^{\perp}$

$\square$

η πρό $\forall \epsilon > 0 \quad |T| + \epsilon I$ συνεχώς

$\delta(|T| + \epsilon I) \subseteq [\epsilon, \infty)$

δηλαδή να

$$T(|T| + \epsilon I)^{-1} \in \mathcal{M}$$

μπορώ να $\forall \epsilon > 0 \quad \forall x \in H$

$$Vx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(|T| + \epsilon I)^{-1} x$$

$$\Rightarrow V = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} S \circ T \circ T(|T| + \epsilon I)^{-1} \in \mathcal{M}$$

Άσκ 4 $A = A^* \in \mathcal{B}(H)$. P είναι η προβολή
 της H στην A -ινvariant υποχώρο
 δ. ότι $P \in \{A\}'$

Απόδ Έστω $K \subseteq H$ η A -ινvariant υποχώρο $A(K) \subseteq K$
 και $P = P_K$

Έχουμε $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x \in H$
 $Px \in K$

$$\Rightarrow A(Px) \in K \Rightarrow P(APx) = APx$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{PAP = AP}$$

οπότε $y \in K^\perp$ τότε $\forall x \in H$

$$A^* = A$$

$$\langle \underline{PA}y, \underline{x} \rangle \stackrel{A^*=A}{=} \langle y, APx \rangle = \langle y, PAPx \rangle$$

$$= \langle Py, APx \rangle = 0$$

$$PAy = 0 \quad \forall y \in K^\perp \Rightarrow PA(I-P)z = 0$$

$$\text{οπότε} \quad PA(I-P) = 0$$

$$\text{δηλαδή} \quad \underline{PA = PAP}$$

$$P \in \{A\}'$$

(iii) ^{Αν} Έστω A συμπαγής, τότε η A αντιστοιχεί
 σε κλειστό ιδιοχώρο K στην $\{A\}''$

Απόδ K ιδιοχώρος με ιδιοτιμή λ
 $K = \ker(A - \lambda I)$

οπότε $\forall S \in \{A\}'$ έχω $S(K) \subseteq K$

$$\text{οπότε} \quad \forall x \in K \quad \text{έχουμε} \quad \underbrace{(A - \lambda I)(Sx)}_{=0} =$$

$$S(A - \lambda I)x = 0$$

$$\Rightarrow Sx \in \ker(A - \lambda I)$$

$$\text{οπότε} \quad P_K S = S P_K$$

$$\Rightarrow P_K \in \{A\}''$$

Υποσυνολοεισότητες παρα την A συμπαγής A
 έχουν ενεργοποιώμενη υποχώρους.

(α) λ δεν είναι A $\in \mathcal{B}(L^2[0,1])$

$$(Af)(t) = t f(t), \quad f \in L^2$$

[Γεγονότος, ο. $A = A^* \in \mathcal{B}_1(H)$
 και οι γειρασμοί
 $\{A_j\}_{j=1}^n$]

Ασκήση 3 $n \in \mathbb{N}$
 $T \in \mathcal{B}(H^{(n)})$. Ας ορίσουμε $T \in \mathcal{P}_1(H^{(n)})$
 $\iff \forall T_{ij} \in \mathcal{P}_1(H)$

$$T = [T_{ij}] \in M_n(\mathcal{B}(H))$$

ο.δ. $T_{ij} = V_i T V_j^*$ $V_i: H \rightarrow H^{(n)}$
 $V_i: \xi \mapsto \xi \otimes e_i$

$$(H^{(n)} = \underbrace{H \oplus \dots \oplus H}_n \approx H \otimes \ell^2[n])$$

van $T_2(T) = \sum_{i=1}^n T_2(T_{ii})$

Ανάλυση Υπόθετουμε $T \geq 0 \implies T_{ii} = V_i T V_i^* \in \mathcal{B}(H)^+$

ο.δ. $\{x_k: k \in \mathbb{N}\}$ ο.δ. βασ. σε H

$\{x_k \otimes e_i: k \in \mathbb{N}, i \in [n]\}$ ο.δ. βασ. σε $H \otimes \ell^2[n]$

[$T_2(T) = \sum_{k,i} \langle T(x_k \otimes e_i), (x_k \otimes e_i) \rangle$

(επειδή $\forall T \in \mathcal{P}_1(H^{(n)})$)
 $= \sum_{k,i} \langle T_{ii} x_k, x_k \rangle$

$(\langle T_{ii} x, y \rangle_H = \langle T(x \otimes e_i), (y \otimes e_i) \rangle_{H^{(n)}})$

$\forall T_{ii} \in \mathcal{P}_1(H)$
 $= \sum_{i=1}^n \left(\sum_k \langle T_{ii} x_k, x_k \rangle \right) = \sum_{i=1}^n T_2(T_{ii})$]

Συνεπώς, ο.δ. $\forall T_{ii} \in \mathcal{P}_1(H)^+$ και $T_2(T) < +\infty$

$\implies T \in \mathcal{P}_1(H^{(n)})$

$\|T\|_{\mathcal{P}_1(H^{(n)})}$
 έχει νόημα εφόσον
 $T \geq 0$

$$\text{Γενημένη απεικόνιση: } T \in \mathcal{B}(H^{(n)})$$

$$\text{αν } T \in \mathcal{P}_1(H^{(n)}) \text{ τότε}$$

$$T_{ij} = V_i^* T V_j \in \mathcal{P}_1(H) \text{ όλων}$$

$$T_{ij} : H \xrightarrow[\text{αρ}]{V_j} H^n \xrightarrow[\text{trace class}]{T} H^n \xrightarrow[\text{αρ}]{V_i^*} H \Rightarrow \text{trace class}$$

$$\text{Αντίστροφο, αν } \forall T_{ij} \in \mathcal{P}_1(H) \text{ τότε } T \in \mathcal{P}_1(H)$$

$$T = \sum_{i,j=1}^n T_{ij} \otimes E_{ij}$$

$$\text{αρα αρ-ε' τότε } T_{ij} \otimes E_{ij}$$

$$T_2(H(|T_{ij} \otimes E_{ij}|)) \stackrel{?}{<} \infty$$

$$|T_{ij} \otimes E_{ij}|^2 = (T_{ij} \otimes E_{ij})^* (T_{ij} \otimes E_{ij})$$

$$= (T_{ij}^* \otimes E_{ji})(T_{ij} \otimes E_{ij})$$

$$= (T_{ij}^* T_{ij} \otimes E_{ji} E_{ij})$$

$$= |T_{ij}|^2 \otimes E_{jj}$$

$\Downarrow$

$$|T_{ij} \otimes E_{ij}| = |T_{ij}| \otimes E_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ - & - & |T_{ij}| & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_{ij} \in \mathcal{P}_1(H) \Rightarrow T_2(H(|T_{ij}|)) < \infty$$

$$\Rightarrow T_2(H(|T_{ij} \otimes E_{ij}|)) = T_2(H(|T_{ij}|)) < \infty$$

$$\text{Aufg 1 } \rho \in C_1(H) : \rho = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sum_n \sum_n$$

$\{ \sum_n : n \in \mathbb{N} \}$ ist p.a. zu H o.a.
(direktes Produkt zu $|\rho|$)

$$|\rho| \sum_n = s_n \sum_n \quad \forall n$$

$$\nexists \sum_n \sum_n \quad \rho \text{ ist a. 1-1} \\ \Leftrightarrow s_n > 0$$

$$\text{Def } \varphi : B(H) \rightarrow \mathbb{C} \\ a \mapsto \text{tr}(\rho a)$$

$\Rightarrow$ spw ist φ linear statl. o.u.v. $\rho \geq 0$ u.a. $\text{tr}(\rho) = 1$

Teil 2: Gruppe zu $(\pi, H, \sum)$ zu charakteris. GMS

Gruppe zu $(\pi, H_1, \sum)$ mit $H_1 = H \otimes_2 \ell^2(\mathbb{N})$

$$\pi : B(H) \rightarrow B(H_1) \\ a \mapsto a \otimes I$$

$$\sum = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{s_n} \sum_n \otimes e_n$$

↑ summande von $\ell^2(\mathbb{N})$

also $\sum \in H_1$ also

$$\|\sum\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{s_n})^2 = \text{tr}(\rho) = 1$$

Es gilt: $\pi : x \mapsto x \otimes \rho$

$$\text{Def } \pi(a^*) = a^* \otimes I = (a \otimes I)^*$$

also $a \otimes a^* \otimes I$

$$\langle (a^* \otimes I)(x \otimes y), (z \otimes w) \rangle$$

"

$$\langle ax \otimes y, z \otimes w \rangle = \langle ax, z \rangle \langle y, w \rangle$$

$$= \langle x, a^* z \rangle \langle y, w \rangle = \langle x \otimes y, a^* z \otimes w \rangle$$

$$= \langle x \otimes y, (a^* \otimes I)(z \otimes w) \rangle$$

also ist

$$\langle (a^* \otimes I) \left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right), \left(\sum_{j=1}^m z_j \otimes w_j \right) \rangle$$

"

$$\langle (a^* \otimes I) (\text{ " }), (\text{ " }) \rangle$$

$$\text{also gilt: } a^* \otimes I = (a \otimes I)^*$$

$$\begin{aligned}
 & \forall c \in \mathcal{B}(H) \\
 & \langle \underbrace{n(c)}_{\mathcal{F}}, \mathcal{F} \rangle = \langle (c \otimes I) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{s_n} \xi_n \otimes e_n \right), \left(\sum_m \sqrt{s_m} \xi_m \otimes e_m \right) \rangle \\
 & = \langle \sum_n \sqrt{s_n} c \xi_n \otimes e_n, \sum_m \sqrt{s_m} \xi_m \otimes e_m \rangle \\
 & = \sum_{n,m} \sqrt{s_n} \sqrt{s_m} \langle c \xi_n, \xi_m \rangle \underbrace{\langle e_n, e_m \rangle}_{\delta_{n,m}} \\
 & = \sum_n s_n \langle c \xi_n, \xi_n \rangle \\
 & = \sum_n s_n T_2(c \xi_n \xi_n^*) \\
 & = T_2 \left(\sum_n s_n c \xi_n \xi_n^* \right) \\
 & = T_2(\rho_c) = \eta(c) = \langle n_G(\cdot) \mathcal{F}, \mathcal{F} \rangle
 \end{aligned}$$

Αρκετά να έχουμε n -κυβλινο $\mathcal{H}$

$n(\mathcal{H})_{\mathcal{F}}$: αριθμός υποχώρων σε $\mathcal{H}$
 Αρκούν να έχουμε

$$n(\mathcal{H})_{\mathcal{F}} \geq \underbrace{H \otimes_{\mathcal{F}} \mathcal{F}}_N$$

δηλ. αρκεί να έχουμε $\forall x = \sum_{n=1}^N x_n \otimes e_n$ αντιστοιχία
 από $\mathcal{F}$ με $\mathcal{H}$

Ορίστω $\alpha: \text{span}\{e_n\} \rightarrow H$

$$\alpha \xi_n = \begin{cases} \frac{x_n}{\sqrt{s_n}} & n=1, \dots, N \\ 0 & , n > N \end{cases}$$

$$\alpha = \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{s_n}} x_n \xi_n^* \in \mathcal{B}(H) \text{ ισχυρά το } \alpha$$

$$\alpha \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s_1}} x_1 \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{s_N}} x_N \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha \xi &= \alpha \left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \xi_n \otimes e_n \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \alpha \xi_n \otimes e_n = x
 \end{aligned}$$

$$\text{c.p. } x \in \pi(A) \xi$$

$$\begin{array}{ccc}
 \text{c.p. } 1 \otimes e^2 \subseteq \pi(A) \xi & & \\
 \uparrow \text{norm} & & \uparrow \text{norm}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 A) \text{ for } \text{norm}: \quad \forall \xi \in H, \\
 \xi \perp \pi(A) \xi \\
 \text{for } \xi = 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta \text{ c.p. } \xi \text{ norm } \xi \in H \otimes e^2$$