Ανεξαρτησία του φάσματος σε C* άλγεβρες

Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ κλειστή υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Έστω $b \in \mathcal{B}$. Αν $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$, τότε βέβαια $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Συνεπώς $\sigma_{\mathcal{A}}(b) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(b)$. Ισότητα όμως δεν ισχύει πάντα.

Παράδειγμα 1. *$\mathcal{A} = C(\mathbb{T})$ (όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$) και $\mathcal{B}$ η άλγεβρα του δίσκου, δηλ. το σύνολο των $f \in \mathcal{A}$ για τις οποίες υπάρχει συνεχής επέκταση $\tilde{f} : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$, που είναι ολόμορφη στον ανοικτό δίσκο $\mathbb{D}$. Η $f(z) = z$ ανήκει στην $\mathcal{B}$, αλλά η $\frac{1}{f} \in \mathcal{A}$ δεν ανήκει στην $\mathcal{B}$.*

Πρόταση 2. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα $\mathbf{1}$ και $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ μια C* υπάλγεβρα με $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Τότε για κάθε $b \in \mathcal{B}$ ισχύει*

$$\sigma_{\mathcal{A}}(b) = \sigma_{\mathcal{B}}(b).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξω ότι αν $b \in \mathcal{B}$ και $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$, τότε $b \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B})$.

Έστω $a \in \mathcal{A}$ ο αντίστροφος του b στην $\mathcal{A}$. Να δείξουμε ότι $a \in \mathcal{B}$.

Θεωρώ το $c = b^*b$ και παρατηρώ ότι είναι αυτοσυζυγές, ότι ανήκει στην $\mathcal{B}$ (διότι η $\mathcal{B}$ είναι *-υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$, άρα περιέχει και το b^*), και ότι είναι αντιστρέψιμο στην $\mathcal{A}$ με αντίστροφο το aa^*: Πράγματι, $(b^*b)(aa^*) = b^*(ba)a^* = b^*a^* = (ab)^* = \mathbf{1}$ και $(aa^*)(b^*b) = a(a^*b^*)b = a(ba)^*b = ab = \mathbf{1}$.

Ισχυριζομαι οτι $aa^* \in \mathcal{B}$.

Για καθε $n \in \mathbb{N}$, θετουμε $c_n = c - \frac{i}{n}\mathbb{1}$. Επειδη το c ειναι αυτοσυζυγες, ισχυει ότι $\sigma_{\mathcal{B}}(c) \subseteq \mathbb{R}$, επομενως $c_n \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}) \subseteq \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$. Ομως $\lim_n(c - \frac{i}{n}\mathbb{1}) = c$ και η απεικονιση $x \to x^{-1} : \mathrm{Inv}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Inv}(\mathcal{A})$ ειναι συνεχης (οπως εχουμε αποδειξει) συνεπως $\lim_n(c - \frac{i}{n}\mathbb{1})^{-1} = c^{-1} = a^*a$. Αλλα $(c - \frac{i}{n}\mathbb{1})^{-1} \in \mathcal{B}$ για καθε n και η $\mathcal{B}$ ειναι κλειστη, επομενως $a^*a \in \mathcal{B}$.

Εχουμε λοιπον $a^*a \in \mathcal{B}$, αρα $(aa^*)b^* \in \mathcal{B}$. Αλλα $(aa^*)b^* = a(a^*b^*) = a$, αφού $a^*b^* = \mathbf{1}$, οποτε $a \in \mathcal{B}$, όπως θέλαμε. □