

## Το φάσμα στοιχείου άλγεβρας Banach

Έστω  $\mathcal{A}$  άλγεβρα Banach με μονάδα  $\mathbf{1}$ . Ένα  $x \in \mathcal{A}$  λέγεται *αντιστρέψιμο* (*invertible*) αν υπάρχει  $x^{-1} \in \mathcal{A}$  ώστε  $xx^{-1} = x^{-1}x = \mathbf{1}$ . Γράφουμε  $x \in \text{Inv}(\mathcal{A})$ .

**Πρόταση 1.** (i) Αν  $\|\mathbf{1} - a\| < 1$  τότε το  $a$  είναι αντιστρέψιμο και μάλιστα

$$a^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{1} - a)^k.$$

(ii) Το  $\text{Inv } \mathcal{A}$  είναι ανοικτό υποσυνολο της  $\mathcal{A}$  και η απεικόνιση  $a \mapsto a^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\text{Inv } \mathcal{A}$  (αρα ομοιομορφισμός).

*Απόδειξη.* Η σειρά  $s = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbf{1} - a)^k$  συγκλίνει απολυτά:  $\sum_{k=0}^{\infty} \|(\mathbf{1} - a)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\mathbf{1} - a\|^k < \infty$ . Επομένως, λόγω πληροτητας (τα μερικά της αθροίσματα αποτελούν βασική ακολουθία), συγκλίνει σε κάποιο  $s \in \mathcal{A}$ . Θετώντας  $b := \mathbf{1} - a$ , έχουμε

$$as = (\mathbf{1} - b) \lim_N \sum_{k=0}^n b^k = b^0 - \lim_n b^{n+1} = \mathbf{1}$$

(αφού  $\|b\| < 1$ ) και ομοίως  $sa = \mathbf{1}$ . Δειξάμε ότι  $a \in \text{Inv } \mathcal{A}$  και  $a^{-1} = s$ .

Συνεπώς έχουμε δείξει ότι η ανοικτή μπαλα  $B(\mathbf{1}, 1)$  στην  $\mathcal{A}$  με κέντρο  $\mathbf{1}$  και ακτίνα 1 περιέχεται στο  $\text{Inv } \mathcal{A}$ .

Άρα το  $\mathbf{1}$  είναι εσωτερικό σημείο του  $\text{Inv } \mathcal{A}$ .

Αν τώρα  $a \in \text{Inv } \mathcal{A}$ , επειδή η απεικόνιση  $\lambda_a : b \mapsto ab$  είναι ομοιομορφισμός της  $\mathcal{A}$ , το  $a$  θα είναι κι αυτό εσωτερικό σημείο του  $\text{Inv } \mathcal{A}$ : συγκεκριμένα, αν  $\|a - b\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$  τότε  $b \in \text{Inv } \mathcal{A}$ . Πραγματι,

$$\|\mathbf{1} - a^{-1}b\| = \|a^{-1}(a - b)\| \leq \|a^{-1}\| \|a - b\| < 1$$

πραγμα που σημαίνει ότι το  $a^{-1}b$  είναι αντιστρέψιμο, άρα και το  $b = aa^{-1}b$  είναι αντιστρέψιμο.

Δειξάμε λοιπόν ότι το  $\text{Inv } \mathcal{A}$  είναι ανοικτό στην  $\mathcal{A}$ .

Για να δείξουμε ότι η  $a \mapsto a^{-1}$  είναι συνεχής στο  $\text{Inv } \mathcal{A}$ , θεωρούμε  $a, b \in \text{Inv } \mathcal{A}$  με  $\|a - b\| < \frac{1}{2\|a^{-1}\|}$  και (χρησιμοποιώντας ότι  $a^{-1}b^{-1} = a^{-1}(b-a)b^{-1}$ ) υπολογίζουμε:

$$\|b^{-1}\| \leq \|a^{-1}b^{-1}\| + \|a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \|a - b\| \|b^{-1}\| + \|a^{-1}\| \leq \frac{1}{2} \|b^{-1}\| + \|a^{-1}\|$$

άρα  $\|b^{-1}\| \leq 2\|a^{-1}\|$ , οπότε

$$\|a^{-1}b^{-1}\| \leq \|a^{-1}\| \|a - b\| \|b^{-1}\| < 2\|a^{-1}\|^2 \|a - b\|$$

Απο την τελευταία ανισότητα έπεται ότι

$$\lim_{b \rightarrow a} \|a^{-1} - b^{-1}\| = 0$$

οπώς θελάμε. □

**Ορισμός 1.** Έστω  $\mathcal{A}$  άλγεβρα Banach με μονάδα και  $x \in \mathcal{A}$ . Το **φάσμα (spectrum)**  $\sigma(x)$  του  $x$  είναι το σύνολο

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \mathbf{1} - x \notin \text{Inv}(\mathcal{A})\}.$$

Αν  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ , το  $r_\lambda(x) := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$  λέγεται **επιλύων ή επιλύουσα συνάρτηση (resolvent)** του  $x$ .

**Παραδείγματα** (i) Αν  $\mathcal{A} = M_n(\mathbb{C})$ , το φάσμα ενός πίνακα είναι το σύνολο των ιδιοτιμών του. Το γεγονός ότι είναι μη κενό οφείλεται στο Θεμελιώδες Θεώρημα της Αλγεβρας, ότι κάθε μη σταθερο πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστες έχει ρίζα. Το Θεώρημα αυτό με τη σειρά του αποδεικνύεται συνηθώς με το Θεώρημα Liouville της Μιγαδικής Αναλυσης, ότι κάθε μιγαδική συναρτηση που έχει παντού μιγαδική παραγώγο και είναι φραγμένη, είναι αναγκαστικά σταθερή.

(ii) Αν  $\mathcal{A} = \mathcal{B}(H)$  όπου  $H$  χώρος Hilbert, δεν είναι αλήθεια ότι κάθε τελεστής έχει ιδιοτιμές (παραδειγμα το shift  $e_n \mapsto e_{n+1}$  στον  $\ell^2$ ). Όπως θα δούμε όμως (πάλι με μεθόδους Μιγαδικής Αναλυσης) το φάσμα κάθε τελεστή είναι μη κενό.

(iii) Αν  $\mathcal{A} = C(K)$  όπου  $K$  συμπαγής χώρος Hausdorff, το φάσμα κάθε συνεχούς συναρτησης  $f$  είναι το (συμπαγές) σύνολο τιμών της  $f(K)$ . Πραγματι, η  $1/(\lambda - f)$  ορίζεται αν και μόνον αν η  $\lambda - f$  δεν μηδενίζεται πουθενά, δηλαδή αν-ν  $\lambda \notin f(K)$ , και τότε η  $1/(\lambda - f)$  είναι συνεχής.

**Θεώρημα 2.** Σε κάθε άλγεβρα Banach  $\mathcal{A}$  (με μονάδα), το φάσμα  $\sigma(x)$  κάθε  $x \in \mathcal{A}$  είναι μη κενό και συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και η επιλύουσα συνάρτηση

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) \rightarrow \mathcal{A} : \lambda \rightarrow r_\lambda(x) := (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$$

είναι ολόμορφη (έχει τοπικά δυναμοσειρά γύρω από κάθε  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ ).<sup>1</sup>

*Απόδειξη.* (i) Έστω πρώτα  $|\lambda| > \|x\|$ . Τότε  $\|\frac{x}{\lambda}\| < 1$  άρα  $\sum_{n=0}^{\infty} \|(\frac{x}{\lambda})^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{x}{\lambda}\|^n < \infty$  (γεωμετρική σειρά).

Συνεπώς η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x}{\lambda})^n$  συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει στην  $\mathcal{A}$  (πληρότητα της  $\mathcal{A}$ ). Έχουμε

$$r_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda} \left( \mathbf{1} - \frac{x}{\lambda} \right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}}$$

διότι

$$\begin{aligned} (\lambda \mathbf{1} - x) \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} &= \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} (\lambda \mathbf{1} - x) = \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^N \frac{x^{n+1}}{\lambda^{n+1}} \\ &= \mathbf{1} - \frac{x^{N+1}}{\lambda^{N+1}} \rightarrow 0 \text{ καθώς } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Συνεπώς κάθε  $\lambda \in \mathbb{C}$  με  $|\lambda| > \|x\|$  ανήκει στο  $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ .

• Δηλαδή το  $\sigma(x)$  είναι φραγμένο σύνολο στο  $\mathbb{C}$  και μάλιστα  $\sigma(x) \subseteq B(0, \|x\|)$ .

(ii) Έστω τώρα  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει  $\delta > 0$  ώστε  $B(\lambda_0, \delta) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ , οπότε το  $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$  είναι ανοικτό, και ότι η  $\lambda \rightarrow r_\lambda(x)$  έχει δυναμοσειρά που συγκλίνει για κάθε  $\lambda_0$  στην  $B(\lambda_0, \delta)$ .

<sup>1</sup>Σχόλιο: Χρησιμοποιούμε εδώ ως ορισμό της ολομορφίας την τοπική παραστασιμότητα σε δυναμοσειρά. Αποδεικνύεται (αλλά δεν θα μας χρειασθεί) ότι η συνθήκη αυτή ισοδυναμεί με την ύπαρξη παραγώγου (δηλ.  $\|\cdot\| - \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} r_\lambda(x) \in \mathcal{A}$ ) σε κάθε σημείο  $\lambda_0$  του πεδίου ορισμού της συναρτησης.

Πράγματι: αφού  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ , το  $r_{\lambda_0}(x) = (\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-1} \in \mathcal{A}$  ορίζεται. Το συμβολίζουμε με  $r \in \mathcal{A}$  για συντομία, και θέτουμε  $\delta = \frac{1}{\|r\|}$ .

Έστω  $\lambda \in B(\lambda_0, \delta)$ , δηλαδή  $|\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|r\|}$ . Θέτοντας  $\mu = \lambda_0 - \lambda$ , παρατηρούμε ότι  $\|\mu r\| < 1$  άρα η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} (\mu r)^n$  συγκλίνει στην  $\mathcal{A}$  (όπως πριν) και έχουμε

$$r \sum_{n=0}^{\infty} (\mu r)^n = r(\mathbf{1} - \mu r)^{-1} = (r^{-1} - \mu \mathbf{1})^{-1} = ((\lambda_0 \mathbf{1} - x) - (\lambda_0 - \lambda) \mathbf{1})^{-1} = (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$$

άρα το  $r_{\lambda}(x) = (\lambda \mathbf{1} - x)^{-1}$  ορίζεται, δηλαδή  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$  και (αντικαθιστώντας  $\mu = \lambda_0 - \lambda$  και  $r = (\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-1}$ )

$$r_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-(n+1)} \quad (*)$$

που είναι η δυναμοσειρά της  $\lambda \rightarrow r_{\lambda}(x)$  με κέντρο  $\lambda_0$ . Δείξαμε λοιπόν ότι

- το  $\sigma(x)$  είναι κλειστό στο  $\mathbb{C}$  (αρα συμπαγές) και
- η  $\lambda \rightarrow r_{\lambda}(x)$  έχει (τοπικά) δυναμοσειρά γύρω από κάθε  $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ .

(iii) Υποθέτουμε τώρα, προς άτοπο, ότι το  $\sigma(x)$  είναι κενό. Από το (ii), ξέρουμε ότι η συνάρτηση  $\mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A} : \lambda \rightarrow r_{\lambda}(x)$  ορίζεται παντού και έχει (τοπικά) δυναμοσειρά γύρω από κάθε σημείο  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ .

Σταθεροποιούμε μια συνεχή γραμμική μορφή  $\phi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  και θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : \lambda \rightarrow \phi(r_{\lambda}(x)).$$

Για κάθε  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , εφαρμόζοντας την  $\phi$  στην σχέση (\*) έχουμε, από τη γραμμικότητα και τη συνέχεια της  $\phi$ ,

$$f(\lambda) = \phi(r_{\lambda}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n \phi((\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-(n+1)}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda_0 - \lambda)^n$$

όπου  $c_n = \phi((\lambda_0 \mathbf{1} - x)^{-(n+1)}) \in \mathbb{C}$  και η σειρά συγκλίνει για κάθε  $\lambda \in B(\lambda_0, \frac{1}{\|r\|})$ , όπως είδαμε στο (ii).

Δηλαδή η η  $f$  έχει δυναμοσειρά γύρω από κάθε  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , συνεπώς είναι ακέραια (έχει μιγαδική παράγωγο σε κάθε  $\lambda_0$ ).

Ειδικότερα όταν  $|\lambda| > \|x\|$  ξέρουμε από το (i) ότι

$$r_{\lambda}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\lambda^{n+1}} \quad \text{άρα } f(\lambda) = \phi(r_{\lambda}(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \frac{1}{\lambda^{n+1}}.$$

Κατά συνέπεια, ολοκληρώνοντας τη σχέση αυτή πάνω σε έναν κύκλο  $\gamma(t) = \rho e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ακτίνας  $\rho > \|x\|$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κύκλο (εξηγήστε γιατί), έχουμε

$$\int_{\gamma} f(\lambda) d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \int_{\gamma} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda = 2\pi i \phi(x^0) = 2\pi i \phi(\mathbf{1})$$

Όμως, αφού η  $f$  είναι ακέραια, το ολοκλήρωμά της στον κλειστό κύκλο μηδενίζεται (τοπικό Θεώρημα Cauchy!). Κατά συνέπεια, έχουμε  $\phi(\mathbf{1}) = 0$ . Αλλά η συνεχής γραμμική μορφή  $\phi$  ήταν αυθαίρετη, και από το Θεώρημα Hahn Banach μπορούμε να βρούμε  $\phi$  ώστε  $\phi(\mathbf{1}) \neq 0$ .

Η αντίφαση αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη ότι το  $\sigma(x)$  δεν μπορεί να είναι κενό.

*Σημείωση* Στο τελευταίο βήμα μπορεί κανείς να ολοκληρώσει την απόδειξη και ως εξής:

Όταν  $|\lambda| > \|x\|$  έχουμε

$$\|r_\lambda\| = \frac{1}{|\lambda|} \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^n \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \left(1 - \left\| \frac{x}{\lambda} \right\|\right)^{-1} = (|\lambda| - \|x\|)^{-1},$$

επομένως  $|f(\lambda)| \leq \|\phi\| (|\lambda| - \|x\|)^{-1}$ , άρα  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} |f(\lambda)| = 0$ . Αφού η  $f$  είναι ακέραια και μηδενίζεται στο άπειρο, από το Θεώρημα Liouville (!) έπεται ότι αναγκαστικά  $f = 0$ . Θέτοντας  $\lambda = 0$  βρίσκουμε  $0 = f(0) = \phi(x^{-1})$ , που οδηγεί πάλι σε άτοπο από το Θεώρημα Hahn Banach.  $\square$