Η Αναπαράσταση GNS

Θεώρημα 1 (Gelfand, Naimark, Segal). *Για κάθε κατάσταση ω σε μια C^* άλγεβρα $\mathcal{A}$ με μονάδα υπάρχει μια τριάδα $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$ όπου π_ω είναι αναπαράσταση της $\mathcal{A}$ σ' εναν χώρο Hilbert H_ω και $\xi_\omega \in H_\omega$ ένα* κυκλικό [1] *μοναδιαίο διάνυσμα ώστε*

$$\omega(a) = \langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega \rangle \quad \text{για κάθε} \;\; a \in \mathcal{A}.$$

Όπως θα δούμε, η τριάδα GNS $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \xi_\omega)$ καθορίζεται μοναδικά, modulo unitary ισοδυναμία, από την ισότητα αυτή.

Θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 2. *Αν ω είναι θετική γραμμική μορφή στην $\mathcal{A}$, τότε*

$$\omega(b^*a^*ab) \le \|a\|^2\, \omega(b^*b), \quad \text{για κάθε} \;\; a, b \in \mathcal{A}\,.$$

Απόδειξη. Αρκεί να υποθέσουμε ότι $\|a\| \le 1$ και να δείξουμε ότι $\omega(b^*a^*ab) \le \omega(b^*b)$.

Αφού $\|a^*a\| \le 1$, έχουμε $\mathbf{1} - a^*a \ge 0$. Πράγματι, το $\mathbf{1} - a^*a$ είναι αυτοσυζυγές και $\sigma(a^*a) \subseteq [0,1]$ άρα $\sigma(\mathbf{1} - a^*a) = \{1 - \lambda : \lambda \in \sigma(a^*a)\} \subseteq [0,1]$.
Συνεπώς το $\mathbf{1} - a^*a$ έχει θετική τετραγωνική ρίζα $x := (\mathbf{1} - a^*a)^{1/2}$.

Έπεται ότι για κάθε $b \in \mathcal{A}$ ισχύει ότι $b^*b - b^*a^*ab \ge 0$. Πράγματι,

$$b^*b - b^*a^*ab = b^*(\mathbf{1} - a^*a)b = b^*x^2b = (xb)^*(xb) \ge 0.$$

Αφού η ω είναι θετική έχουμε $\omega(b^*b - b^*a^*ab) \ge 0$ δηλαδή $\omega(b^*a^*ab) \le \omega(b^*b)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος

1. *Θεωρούμε τον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.*
2. *Ορίζουμε* $\quad \langle a, b \rangle_0 := \omega(b^*a), a, b \in \mathcal{A}$.
   Το $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ είναι προφανώς sesquilinear μορφή, και (αφού η ω είναι θετική) ικανοποιεί $\langle b, a \rangle_0 = \omega(a^*b) = \overline{\omega(b^*a)} = \overline{\langle a, b \rangle_0}$ *και* $\langle a, a \rangle_0 := \omega(a^*a) \ge 0$ *για κάθε* $a, b \in \mathcal{A}$.
   Είναι λοιπόν ημι-εσωτερικό γινόμενο στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$.

Παρατηρούμε ότι η ανισότητα Cauchy-Schwarz για την ω γράφεται $|\langle a, b \rangle_0|^2 \le |\langle a, a \rangle_0 \langle b, b \rangle_0|$.

3. *Θέτουμε*
$$\mathcal{N}_\omega = \mathcal{N} := \{u \in \mathcal{A} \; : \langle u, u \rangle_0 = 0\}.$$
   Ισχύει η ισότητα
$$\mathcal{N} = \{u \in \mathcal{A} \; : \langle u, a \rangle_0 = 0 \text{ για κάθε } a \in \mathcal{A}\} \qquad (*)$$
   και συνεπώς το $\mathcal{N}$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{A}$.

[1] δηλ. τέτοιο ώστε το $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$ να είναι πυκνό στον H_ω.

Πράγματι, αν $\langle u, a\rangle_0 = 0$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, τότε βέβαια $\langle u, u\rangle_0 = 0$. Αντίστροφα, αν $\langle u, u\rangle_0 = 0$, τότε λόγω της ανισότητας Cauchy-Schwarz για κάθε $a \in \mathcal{A}$ έχουμε $|\langle u, a\rangle_0|^2 \leq |\langle u, u\rangle_0 \langle a, a\rangle_0| = 0$ άρα $\langle u, a\rangle_0 = 0$.

4. *Θέτουμε $H_{0\omega} := \mathcal{A}/\mathcal{N}$. Παρατηρούμε ότι το ημι-εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ επάγει ένα εσωτερικό γινόμενο στον $H_{0\omega}$:*

$$\langle [a], [b]\rangle_\omega := \langle a, b\rangle_0, \quad \textit{για κάθε} \quad [a] = a + \mathcal{N}, [b] = b + \mathcal{N} \textit{ στον } \mathcal{A}/\mathcal{N}.$$

   Ονομάζουμε λοιπόν H_ω την πλήρωση του $H_{0\omega}$ ως προς την $\|[u]\|_\omega := \sqrt{\langle [u], [u]\rangle_\omega}$. *Καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το ίδιο σύμβολο για το εσωτερικό γινόμενο στον H_ω.*

Πράγματι, η απεικόνιση αυτή είναι καλά ορισμένη: αν $[a] = [a_1]$ και $[b] = [b_1]$, δηλαδή $a_1 - a = u \in \mathcal{N}$ και $b_1 - b = v \in \mathcal{N}$ τότε

$$\langle [a_1], [b_1]\rangle_\omega = \langle a + u, b + v\rangle_0 = \langle a, b\rangle_0 + \langle u, b\rangle_0 + \langle a + u, v\rangle_0 = \langle a, b\rangle_0 = \langle [a], [b]\rangle_\omega$$

από το βήμα (3), εφόσον $u, v \in \mathcal{N}$. Το $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ είναι προφανώς ημι-εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$. Επιπλέον, αν $\langle [a], [a]\rangle_\omega = 0$ τότε $\langle a, a\rangle_0 = 0$, δηλαδή $a \in \mathcal{N}$ άρα $[a] = [0]$. Συνεπώς το $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ είναι εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ και άρα η επαγόμενη $\|[u]\|_\omega := \sqrt{\langle [u], [u]\rangle_\omega}$ είναι νόρμα στον $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.

Θα ορίσουμε τώρα δράση της $\mathcal{A}$ στον H_ω.

5. *Η $\mathcal{A}$ δρα στον γραμμικό χώρο $\mathcal{A}$ με την λεγόμενη κανονική αριστερή αναπαράσταση π_0 που ορίζεται ως εξής: για κάθε $a \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση $\pi_0(a) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ είναι η $\pi_0(a)(b) = ab$, $b \in \mathcal{A}$.*

6. *Αν $a \in \mathcal{A}$, η απεικόνιση*
$$\pi_1(a) : H_{0\omega} \to H_{0\omega} : [b] \mapsto [ab]$$
   είναι καλά ορισμένη γραμμική απεικόνιση στον $H_{0\omega} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, διότι $\pi_0(a)(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N}$ (δηλαδή το $\mathcal{N}$ είναι αριστερό ιδεώδες της $\mathcal{A}$).

Πράγματι, για κάθε $u \in \mathcal{N}$, έχουμε $\pi_0(a)(u) = au \in \mathcal{N}$ διότι για κάθε $b \in \mathcal{A}$ έχουμε $\langle au, b\rangle_0 = \omega(b^*au) = \omega((a^*b)^*u) = \langle u, a^*b\rangle_0 = 0$, οπότε $au \in \mathcal{N}$ από τη σχέση $(*)$ στο βήμα (3).

Επομένως αν $[b] = [b_1]$, δηλαδή $b_1 - b = u \in \mathcal{N}$, έχουμε $ab_1 - ab = au \in \mathcal{N}$, άρα $[ab] = [ab_1]$.

7. *Για κάθε $a \in \mathcal{A}$ και κάθε $[b] \in H_{0\omega}$ έχουμε*

$$\|\pi_1(a)([b])\|_\omega \leq \|a\| \, \|[b]\|_\omega \,.$$

Πράγματι, $\|\pi_1(a)([b])\|_\omega^2 = \|[ab]\|_\omega^2 = \omega(b^*a^*ab)) \leq \|a\|^2 \, \omega(b^*b) = \|a\|^2 \, \|[b]\|_\omega^2$
από το Λήμμα 2.

Έπεται ότι ο $\pi_1(a)$ επεκτείνεται, αφού είναι συνεχής, σε φραγμένο τελεστή $\pi_\omega(a) : H_\omega \to H_\omega$.

Είναι τώρα εύκολο να δείξει κανείς ότι η απεικόνιση

$$\pi_\omega : \mathcal{A} \to \mathcal{B}(H_\omega) : a \mapsto \pi_\omega(a)$$

*είναι *-αναπαράσταση.*

Απόδειξη Αν $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ και $\lambda \in \mathbb{C}$, για να δείξουμε τις ισότητες $\pi_\omega(a_1+\lambda a_2) = \pi_\omega(a_1)+\lambda\pi_\omega(a_2)$ και $\pi_\omega(a_1 a_2) = \pi_\omega(a_1)\pi_\omega(a_2)$, επειδή είναι ισότητες *φραγμένων* τελεστών, αρκεί να τις ελέγξουμε σε κάθε σημείο $[b]$ του πυκνού υποχώρου $H_{0\omega}$. Από τον ορισμό των πράξεων στον χώρο πηλίκο $H_{0\omega} = \mathcal{A}/\mathcal{N}$, έχουμε $[a_1 b + \lambda a_2 b] = [a_1 b] + \lambda[a_2 b]$ και συνεπώς

$$\begin{aligned}\pi_\omega(a_1 + \lambda a_2)[b] &= \pi_1(a_1 + \lambda a_2)[b] = [(a_1 + \lambda a_2)b] = [a_1 b] + \lambda[a_2 b] \\ &= \pi_\omega(a_1)[b] + \lambda\pi_\omega(a_2)[b] = (\pi_\omega(a_1) + \lambda\pi_\omega(a_2))[b]\,.\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\pi_\omega(a_1 a_2)[b] &= \pi_1(a_1 a_2)[b] = [(a_1 a_2)b] = [a_1(a_2 b)] \\ &= \pi_\omega(a_1)[a_2 b] = \pi_\omega(a_1)(\pi_\omega(a_2)[b]) = (\pi_\omega(a_1)\pi_\omega(a_2))[b]\,.\end{aligned}$$

Τέλος, αν $a \in \mathcal{A}$ και $[b], [c] \in H_{0\omega}$,

$$\begin{aligned}\langle \pi_\omega(a)^*[b], [c]\rangle_\omega &= \langle [b], \pi_\omega(a)[c]\rangle_\omega = \langle [b], [ac]\rangle_\omega \\ &= \omega((ac)^* b) = \omega(c^* a^* b) = \langle [a^* b], [c]\rangle_\omega = \langle \pi_\omega(a^*)[b], [c]\rangle_\omega\end{aligned}$$

συνεπώς $\pi_\omega(a)^*[b] = \pi_\omega(a^*)[b]$ και άρα $\pi_\omega(a)^* = \pi_\omega(a^*)$.

8. *Θέτουμε $\xi_\omega = [\mathbf{1}_\mathcal{A}]$. Το ξ_ω είναι κυκλικό διάνυσμα για την π_ω γιατί*

$$\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega = \{\pi_\omega(a)[\mathbf{1}] : a \in \mathcal{A}\} = \{[a] : a \in \mathcal{A}\} = H_{0\omega}$$

που είναι πυκνός υπόχωρος του H_ω. Τέλος, για κάθε $a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}\langle \pi_\omega(a)\xi_\omega, \xi_\omega\rangle_\omega &= \langle \pi_\omega(a)[\mathbf{1}], [\mathbf{1}]\rangle_\omega \\ &= \langle a, \mathbf{1}\rangle_\omega = \omega(\mathbf{1}^* a) = \omega(a)\,. \qquad \square\end{aligned}$$

Πρόταση 3 («Μοναδικότητα»). *Έστω $\mathcal{A}$ μια C^* άλγεβρα με μονάδα και ω κατάσταση στην $\mathcal{A}$. Αν (π, H, ξ) είναι αναπαράσταση με κυκλικό μοναδιαίο διάνυσμα ξ ώστε*

$$\langle \pi(a)\xi, \xi\rangle = \omega(a) \quad \text{για κάθε } \; a \in \mathcal{A},$$

τότε η (π, H, ξ) είναι unitarily ισοδύναμη με την $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \xi_\omega)$: Υπάρχει μια επί ισομετρία $U : H_\omega \to H$ που ικανοποιεί

$$\pi(a) = U\pi_\omega(a)U^* \quad \text{για κάθε } \; a \in \mathcal{A} \quad \text{και } U\xi_\omega = \xi\,.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\|\pi(a)\xi\|_H^2 = \langle \pi(a)\xi, \pi(a)\xi\rangle = \langle \pi(a^*a)\xi, \xi\rangle = \omega(a^*a) = \langle \pi_\omega(a^*a)\xi_\omega, \xi_\omega\rangle = \\ = \langle \pi_\omega(a)\xi, \pi_\omega(a)\xi\rangle = \|\pi_\omega(a)\xi_\omega\|_{H_\omega}^2 .$$

Επομένως η απεικόνιση

$$U_0 : \pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega \to \pi(\mathcal{A})\xi : \pi_\omega(a)\xi_\omega \mapsto \pi(a)\xi,\ a \in \mathcal{A}$$

είναι καλά ορισμένη (αν $\pi(a)\xi = \pi(b)\xi$ τότε $\pi(a-b)\xi = 0$ άρα $\pi_\omega(a-b)\xi_\omega = 0$ άρα $\pi_\omega(a)\xi_\omega = \pi_\omega(b)\xi_\omega$), είναι προφανώς γραμμική, και είναι ισομετρική. Επεκτείνεται λοιπόν σε μια γραμμική ισομετρία U από την κλειστή θήκη H_ω του $(\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega, \|\cdot\|_{H_\omega})$ στην κλειστή θήκη H του $(\pi(\mathcal{A})\xi, \|\cdot\|_H)$. [2] Το σύνολο τιμών της είναι κλειστό (αφου η U είναι ισομετρία) και περιέχει τον πυκνό υπόχωρο $\pi(\mathcal{A})\xi$ του H, άρα η U είναι επί του H. Επομένως ο U είναι αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$.

Επίσης, θέτοντας $a = \mathbf{1} \in \mathcal{A}$ στον ορισμό της U_0, έχουμε

$$U\xi_\omega = U\pi_\omega(\mathbf{1})\xi_\omega = \pi(\mathbf{1})\xi = \xi.$$

Τέλος, για να δείξουμε ότι $\pi(a) = U\pi_\omega(a)U^*$, ισοδύναμα $\pi(a)U = U\pi_\omega(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$, αρκεί να ελέγξουμε την ισότητα στον πυκνό υπόχωρο $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$. Έστω λοιπόν $x = \pi_\omega(b)\xi_\omega \in \pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$. Τότε

$$\begin{aligned} &\pi(a)U(\pi_\omega(b)\xi_\omega) = \pi(a)(\pi(b)\xi) = \pi(ab)\xi = U(\pi_\omega(ab)\xi_\omega) = U\pi_\omega(a)(\pi_\omega(b)\xi_\omega) \\ &\text{δηλαδή} \qquad \pi(a)U(x) = U\pi(a)(x)\,. \end{aligned}$$

Αφού οι *φραγμένοι τελεστές* $\pi(a)U$ και $U\pi_\omega(a)$ ταυτίζονται στο πυκνό υποσύνολο $\pi_\omega(\mathcal{A})\xi_\omega$, είναι ίσοι:

$$\begin{tikzcd} H_\omega \arrow[r, tail, two heads, "U"] \arrow[d, "\pi_\omega(a)"'] & H \arrow[d, "\pi(a)"] \\ H_\omega \arrow[r, tail, two heads, "U"'] & H \end{tikzcd}$$

□

Πόρισμα 4. *Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(H)$ μια C^* υπάλγεβρα με $I \in \mathcal{A}$ και $\xi \in H$ μοναδιαίο διάνυσμα. Θεωρούμε την κατάσταση $\omega(A) := \langle A\xi, \xi\rangle$, $A \in \mathcal{A}$. Τότε η αναπαράσταση GNS $(\pi_\omega, H_\omega, \xi_\omega)$ είναι unitarily ισοδύναμη με την $A \to A|_K$, $A \in \mathcal{A}$ όπου $K := \overline{\mathrm{span}\{A\xi : A \in \mathcal{A}\}}$.*

(... και μπορώ να επιλέξω τον τελεστή U που υλοποιεί την ισοδυναμία ώστε $U\xi_\omega = \xi$.)

Απόδειξη. Άσκηση.

[2] Τα ξ_ω και ξ' είναι κυκλικά για τις π_ω και π' αντίστοιχα.