Ο τύπος Gelfand-Beurling

Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Η *φασματική ακτίνα (spectral radius)* $\rho(a)$ είναι η ακτίνα του μικρότερου δίσκου στο $\mathbb{C}$ που περιέχει το $\sigma(a)$. Δηλαδή

$$\rho(a) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} .$$

Έχουμε δείξει ότι $\sigma(a) \subseteq B(0, \|a\|)$, άρα $\rho(a) \leqslant \|a\|$, αλλά η ανισότητα μπορεί να είναι γνήσια (π.χ. όταν $a \neq 0$ και $a^2 = 0$).

Θεώρημα 1. *Έστω $\mathcal{A}$ άλγεβρα Banach (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$. Τότε*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \lim_n \|a^n\|^{1/n} .$$

Πόρισμα 2. *Αν $\mathcal{A}$ είναι C*-άλγεβρα (με μονάδα) και $a \in \mathcal{A}$ φυσιολογικό (δηλ. $a^*a = aa^*$) τότε*

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = \|a\| .$$

Ειδικότερα αυτό ισχύει όταν το a είναι αυτοσυζυγές (δηλ. $a^* = a$).

Απόδειξη του Θεωρήματος. Θα δείξουμε ότι

$$\limsup \|a^n\|^{1/n} \leqslant \rho(a) \leqslant \liminf \|a^n\|^{1/n}$$

οπότε θα έχουμε δείξει ταυτοχρόνως την ύπαρξη του ορίου και τη ζητούμενη ισότητα.

(i) Δείχνουμε πρώτα την δεύτερη ανισότητα:
Αν $\lambda \in \sigma(a)$ τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε[1] $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ άρα $|\lambda|^n \leqslant \|a^n\|$, όπως έχουμε δείξει. Επομένως $|\lambda| \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Παίρνοντας supremum ως προς $\lambda \in \sigma(a)$, έχουμε $\rho(a) \leqslant \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα $\rho(a) \leqslant \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ και συνεπώς $\rho(a) \leqslant \liminf \|a^n\|^{1/n}$.

(ii) Εστω $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχής. Όπως έχουμε δείξει, η συνάρτηση $h(\lambda) = \lambda\phi[(\lambda\mathbf{1} - a)^{-1}]$ ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}\backslash\sigma(a)$, άρα και στο $\{\lambda : |\lambda| > \rho(a)\}$. Επομένως η συνάρτηση

$$g(z) = h\left(\frac{1}{z}\right) = \phi((\mathbf{1} - za)^{-1})$$

ορίζεται και είναι ολόμορφη στο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$. [2] Ορίζεται επίσης και στο 0, γιατί υπάρχει το το όριο $\lim\limits_{z\to 0} g(z) = \phi(\mathbf{1}) \in \mathbb{C}$, (αφού η $x \mapsto x^{-1}$ είναι συνεχής). Συνεπώς το 0 είναι επουσιώδης ανωμαλία για την g, άρα η g ορίζεται (θέτοντας $g(0) = \phi(\mathbf{1})$) και είναι ολόμορφη στον δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{\rho(a)}\}$. Επομένως αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad |z| < \frac{1}{\rho(a)}.$$

[1] Επειδή $x^n - \lambda^n\mathbf{1} = (x - \lambda\mathbf{1})(x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\mathbf{1}) = (x^{n-1} + x^{n-2}\lambda + \ldots + \lambda^{n-1}\mathbf{1})(x - \lambda\mathbf{1})$, αν το $x^n - \lambda^n\mathbf{1}$ αντιστρέφεται τότε και το $x - \lambda\mathbf{1}$ αντιστρέφεται.

[2] Εδώ θέτουμε $\frac{1}{\rho(a)} = +\infty$ όταν $\rho(a) = 0$.

Ισχυρίζομαι ότι $c_n = \phi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, για $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ $(\leqslant \frac{1}{\rho(a)})$ ξέρουμε (εφόσον $\|za\| < 1$) ότι

$$(\mathbf{1} - za)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a^n .$$

άρα, αφού η ϕ είναι γραμμική και συνεχής,

$$g(z) = \phi\left((\mathbf{1} - za)^{-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n), \quad |z| < \frac{1}{\|a\|}.$$

Από την μοναδικότητα της δυναμοσειράς για την g έπεται τώρα ότι $c_n = \phi(a^n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Επομένως η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n \phi(a^n)$ συγκλίνει (όχι μόνον όταν $|z| < \frac{1}{\|a\|}$ αλλά και) όταν $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$. Κατά συνέπεια, για $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$ έχουμε $\lim_{n\to\infty} z^n \phi(a^n) = 0$. Επομένως η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη, δηλαδή για κάθε $\phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ γραμμική και συνεχή υπάρχει $K_\phi(z) < +\infty$ ώστε

$$|\phi(z^n a^n)| \leqslant K_\phi(z) \quad \text{για κάθε } n, \text{ όταν } \ |z| < \frac{1}{\rho(a)} .$$

Από την Αρχή Ομοιομόρφου Φράγματος [3] συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $K(z)$ (ανεξάρτητη της ϕ) τέτοια ώστε για κάθε n να ισχύει $\|z^n a^n\| \leqslant K(z)$, οπότε

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{(K(z))^{\frac{1}{n}}}{|z|} \quad \text{για κάθε } n, \text{ όταν } \ 0 < |z| < \frac{1}{\rho(a)} .$$

Αφού $K(z)^{\frac{1}{n}} \to 1$ όταν $n \to \infty$, έπεται ότι $\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{|z|}$ για κάθε $z \neq 0$ με $|z| < \frac{1}{\rho(a)}$, οπότε

$$\limsup \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho(a)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση Στο πρώτο βήμα της απόδειξης δείξαμε ότι $\rho(a) \leqslant \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$. Επομένως στην πραγματικότητα έχουμε ότι

$$\rho(a) = \lim \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Απόδειξη του Πορίσματος. Υποθέτουμε τώρα ότι η $\mathcal{A}$ είναι C* άλγεβρα και ότι το $a \in \mathcal{A}$ είναι φυσιολογικό. Έχουμε τότε

$$\|a\|^4 \overset{(C^*)}{=} \|a^*a\|^2 \overset{(C^*)}{=} \|(a^*a)^*(a^*a)\| = \|a^*aa^*a\| \overset{(N)}{=} \left\|(a^*)^2a^2\right\| = \left\|(a^2)^*(a^2)\right\| \overset{(C^*)}{=} \left\|a^2\right\|^2$$

(η υπόθεση $a^*a = aa^*$ χρησιμοποιήθηκε στη σχέση (N)), συνεπώς $\|a\|^2 = \left\|a^2\right\|$. Με επαγωγή βρίσκουμε ότι $\|a\|^{2^m} = \left\|a^{2^m}\right\|$, άρα $\|a\| = \left\|a^{2^m}\right\|^{1/2^m}$ για κάθε m, και συνεπώς

$$\rho(a) = \lim_n \|a^n\|^{1/n} = \lim_m \left\|a^{2^m}\right\|^{1/2^m} = \|a\| .$$

[3] Αν $\mathcal{A}^*$ είναι ο χώρος Banach των συνεχών γραμμικών μορφών $\mathcal{A} \to \mathbb{C}$, Σταθεροποιώντας τα a και z θεωρούμε, για κάθε n, την γραμμική και συνεχή απεικόνιση $\omega_n : \mathcal{A}^* \to \mathbb{C} : \phi \to \phi(z^n a^n)$. Η οικογένεια $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι κατά σημείο φραγμένη: για κάθε $\phi \in \mathcal{A}^*$, $|\omega_n(\phi)| = |\phi(z^n a^n)| < K_\phi(z)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κατά συνέπεια είναι ομοιόμορφα φραγμένη: υπάρχει σταθερά $K(z)$ ώστε $\|\omega_n\| \leqslant K(z)$, δηλαδή $|\omega_n(\phi)| \leqslant K(z)\,\|\phi\|$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς για κάθε n έχουμε $|\phi(z^n a^n)| < K(z)$ για κάθε $\phi \in \mathcal{A}^*$ με $\|\phi\| \leqslant 1$, άρα (Hahn-Banach) $\|z^n a^n\| < K(z)$ για κάθε n.