Θεωρήματα Choi και Arveson

Αν $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ είναι C* άλγεβρες και $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι μια θετική γραμμική απεικόνιση, πότε είναι η Φ πλήρως θετική;

• Εν γένει, η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.

• Αν η $\mathcal{A}$ ή η $\mathcal{B}$ είναι *μεταθετικές* C* άλγεβρες, τότε η θετικότητα της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα. (Αποδείξεις παραλείπονται. Δείτε την περίπτωση $\mathcal{B} = \mathbb{C}$ στο τέλος.)

• Θα δείξουμε εδώ ότι αν η $\mathcal{A}$ ή η $\mathcal{B}$ είναι ίσες με $M_d(\mathbb{C})$, τότε (η θετικότητα της Φ δεν συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα, αλλά) η *d-θετικότητα* της Φ συνεπάγεται την πλήρη θετικότητα.

1 Η περίπτωση $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$: Θεώρημα Choi και αναπαράσταση Kraus

Θεώρημα 1 (Choi)**.** *Αν $\mathcal{B}$ είναι μια C* άλγεβρα και $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$ γραμμική, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *Η Φ είναι πλήρως θετική.*
2. *Η Φ είναι d-θετική.*
3. *Ο πίνακας $[\Phi(E_{rs})]_{i,j=1}^{d}$ (Choi matrix of Φ) είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.*
   (Οι πινακες E_{rs} είναι τα matrix units της $M_d(\mathbb{C})$.)

Αναπαράσταση Kraus *Στην περίπτωση $\mathcal{B} = M_k(\mathbb{C})$ (δηλαδη $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to M_k(\mathbb{C})$), η πλήρης θετικότητα της Φ είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη γραμμικών απεικονίσεων $V_1, \dots V_m \in M_{kd} = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$, οπου $m \leqslant kd$, ώστε*

$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^{m} V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C})\,.$$

Ο ελάχιστος αριθμός μη μηδενικών V_j που απαιτούνται για την αναπαράσταση Kraus της Φ ονομάζεται τάξη Kraus *της Φ.*

Για την απόδειξη, θα χρειασθεί ένα Λήμμα:

Λήμμα 1. *Έστω $\mathcal{A}$ μια C* άλγεβρα και $n \in \mathbb{N}$. Ένα στοιχείο της $M_n(\mathcal{A})$ είναι θετικό αν-ν είναι άθροισμα πινάκων της μορφής $[a_i^* a_j]$ όπου $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}$.*

Απόδειξη. Κάθε πίνακας αυτής της μορφής είναι θετικό στοιχείο της $M_n(\mathcal{A})$: Αν $C = [a_i^* a_j]$, τότε $C = A^* A$ όπου $A = [a_{ij}]$ με $a_{1j} = a_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$ και $a_{ij} = 0$ για $i \geqslant 2$ και $j \geqslant 1$. Επομένως $C \geqslant 0$.

Από την άλλη, αν ένα $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$ είναι θετικό, τότε υπάρχει $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathcal{A})$ ώστε $A = B^* B$, δηλαδή $a_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}^* b_{kj}$. Αν λοιπόν θέσουμε $C_k = [b_{ki}^* b_{kj}]$ ($k \in [n]$), τότε $A = \sum_{k=1}^{n} C_k$. □

Απόδειξη θεωρήματος 1. Θέτω $\mathcal{A} := M_d(\mathbb{C})$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Προφανές.

(2) $\Rightarrow$ (3) Παρατηρουμε οτι ο πίνακας $[E_{rs}]_{i,j=1}^{d} \in M_d(M_d(\mathbb{C})) = M_{d^2}(\mathbb{C})$ [1] είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{A})$, γιατί $[E_{rs}] = uu^*$ όπου $u = [e_1, e_2, \dots, e_d]^\dagger$. (Δειτε την περιπτωση $d = 3$)

[1] εδω και στη συνεχεια χρησιμοποιουμε το γεγονος οτι η απεικονιση $M_d(\mathcal{B}(H)) \to \mathcal{B}(H^d) : [a_{ij}] \mapsto A$ (οπου ο τελεστης A που αντιστοιχει στον πινακα $[a_{ij}]$ δρα στον H^d με πολλαπλασιασμο πινακων) ειναι *-ισομορφισμος, οποτε διατηρει και την θετικοτητα

$$[E_{rs}] = \begin{pmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = uu^*$$

Συνεπώς, αν η Φ είναι d-θετική, δηλαδή η $\Phi^d : M_d(\mathcal{A}) \to M_d(\mathcal{B})$ είναι θετική, το $\Phi^d([E_{rs}]) = [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικό στοιχείο της $M_d(\mathcal{B})$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Υποθέτουμε ότι το $[\Phi(E_{rs})]$ ανήκει στον $M_d(\mathcal{B})^+$. Μπορούμε να θεωρούμε ότι $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}(H)$ όπου H χώρος Hilbert (Θεώρημα Gelfand-Naimark).

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Να δείξουμε ότι η $\Phi^n : M_n(\mathcal{A}) \to M_n(\mathcal{B})$ είναι θετική. Αρκεί (δες το Λήμμα 1) να δείξουμε ότι αν $[A_i^* A_j] \in M_n(\mathcal{A})$ (όπου $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$) τότε το $[\Phi(A_i^* A_j)] \in M_n(\mathcal{B}) \subseteq M_n(\mathcal{B}(H)) \simeq \mathcal{B}(H^)$ είναι θετικό, δηλ. $\langle \Phi^n([A_i^* A_j])\xi, \xi \rangle_{H^n} \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in H^n$.

Κάθε $A_i \in \mathcal{A} = M_d$ γράφεται $A_i = [a_{rs}^i] = \sum_{r,s=1}^d a_{rs}^i E_{rs}$ όπου $a_{rs}^i \in \mathbb{C}$. Επομένως

$$A_i^* A_j = \sum_{r,s=1}^d \bar{a}_{rs}^i E_{sr} \sum_{t,u=1}^d a_{tu}^j E_{tu} = \sum_{r,s,u=1}^d \bar{a}_{rs}^i a_{ru}^j E_{su}$$

(γιατι $E_{sr} E_{tu} = \delta_{rt} E_{su}$). Έχουμε λοιπόν, για κάθε $\xi \in H^n$,

$$\begin{aligned} \langle \Phi^n([A_i^* A_j])\xi, \xi \rangle_{H^n} &= \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi(A_i^* A_j)\xi_j, \xi_i \rangle_H = \sum_{i,j=1}^n \langle \Phi \left(\sum_{r,s,u=1}^d \bar{a}_{rs}^i a_{ru}^j E_{su} \right) \xi_j, \xi_i \rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{r,s,u=1}^d \bar{a}_{rs}^i a_{ru}^j \langle \Phi(E_{su})\xi_j, \xi_i \rangle \\ &= \sum_{r,s,u=1}^d \langle \Phi(E_{su}) \left(\sum_{j=1}^n a_{ru}^j \xi_j \right), \left(\sum_{i=1}^n a_{rs}^i \xi_i \right) \rangle \\ &= \sum_{r=1}^d \left(\sum_{s,u=1}^d \langle \Phi(E_{su})\eta_{ru}, \eta_{rs} \rangle_H \right) \quad (\text{όπου } \ \eta_{ru} := \sum_{j=1}^n a_{ru}^j \xi_j) \\ &= \sum_r^d \langle [\Phi(E_{su})]\eta_r, \eta_r \rangle_{H^d} \geqslant 0 \end{aligned}$$

όπου $\eta_r := [\eta_{r1}, \dots \eta_{rd}]^t$. $\square$

Απόδειξη της διάσπασης Kraus. Θα χρειασθεί μια

Παρατήρηση Αν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^k$, έστω V^* ο $k \times n$ πίνακας που έχει στήλες τα $x_1, x_2, \ldots, x_n$, δηλαδή
$$V^* : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^k : e_r \to x_r, \ r = 1, \ldots, n.$$
Τότε
$$\begin{array}{lccccccc} V^* E_{rs} V: & \mathbb{C}^k & \xrightarrow{V} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{E_{rs}} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{V^*} & \mathbb{C}^k \\ & y & \mapsto & Vy & \mapsto & \langle Vy, e_s \rangle e_r & \mapsto & \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r \end{array}$$
Δηλαδή $(V^* E_{rs} V)(y) = \langle Vy, e_s \rangle V^* e_r = \langle y, V^* e_s \rangle V^* e_r = \langle y, x_s \rangle x_r = (x_r x_s^*)(y)$.

Αν ονομάσουμε v το διάνυσμα στήλη $v = (x_1 \oplus x_2 \oplus \cdots \oplus x_n)^\dagger \in (\mathbb{C}^k)^n = \mathbb{C}^{nk}$, τότε ο τελεστής $vv^* : \ell^2[nk] \to \ell^2[nk]$ που ανήκει στον $\mathcal{B}(\ell^2[nk]) = M_{nk} = M_n(M_k)$ έχει πίνακα $vv^* = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Δηλαδή $\quad [V^* E_{rs} V] = [x_r x_s^*]_{r,s}$.

Έστω λοιπόν ότι η $\mathcal{B}$ ισούται με $M_k(\mathbb{C})$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν γραμμικές απεικονίσεις $V_1, \ldots V_m \in M_{kd} = \mathcal{B}(\ell^2[k], \ell^2[d])$ ώστε
$$\Phi(A) = \sum_{j=1}^m V_j^* A V_j \quad \forall A \in M_d(\mathbb{C}) \,.$$
Αρκεί (λόγω γραμμικότητας) να δείξουμε την τελευταια ισοτητα για $A = E_{rs}, \ 1 \leqslant r, s \leqslant d$ (η $\{E_{rs} : 1 \leqslant r, s \leqslant d\}$ είναι βάση του γραμμ. χώρου $\mathcal{A} = M_d$).

Από την υπόθεση, η γραμμική απεικόνιση $\Phi : M_d(\mathbb{C}) \to \mathcal{B}$ ικανοποιεί το (3) του Θεωρήματος Choi, δηλαδή ο πίνακας $B := [\Phi(E_{rs})]$ είναι θετικός στην $M_d(M_k) = M_{dk} = \mathcal{B}(\ell^2[dk])$. Επομένως, από το Φασματικό Θεώρημα (σε χώρους πεπερασμένης διάστασης) υπάρχει ορθοκανονικη βάση $\{f_j : j = 1, \ldots, dk\}$ του $\ell^2[dk]$ από ιδιοδιανύσματα του B με ιδιοτιμές $\lambda_j \geqslant 0$. Δηλαδή
$$B = \sum_{j=1}^{dk} \lambda_j f_j f_j^* = \sum_{j=1}^{dk} v_j v_j^* \quad \text{όπου} \quad v_j = \sqrt{\lambda_j} f_j$$
(τα v_j ειναι καθετα ανα δυο, ενδεχομενως ομως μερικα μηδενιζονται (οταν $\lambda_j = 0$)).
Από την Παρατήρηση, γράφοντας κάθε $v_j \in \mathbb{C}^{dk}$ ως διάνυσμα στήλη $v_j = (x_1^j \oplus x_2^j \oplus \cdots \oplus x_d^j)^\dagger$ με $x_r^j \in \mathbb{C}^k$, έχουμε
$$v_j v_j^* = [x_r^j x_s^{j*}] = [V_j^* E_{rs} V_j]$$
(όπου $V_j^* : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^k : e_r \to x_r^j$) και συνεπώς
$$[\Phi(E_{rs})] = B = \sum_{j=1}^{dk} [V_j^* E_{rs} V_j]$$
$$\text{άρα} \quad \Phi(E_{rs}) = \sum_{j=1}^{dk} V_j^* E_{rs} V_j \,, \quad 1 \leqslant r, s \leqslant d$$
όπως θέλαμε. □

2 Η περίπτωση $\Phi : V \to M_d(\mathbb{C})$: Θεώρημα Arveson

Σύστημα τελεστών (operator system) είναι ένας γραμμικός υπόχωρος $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(H)$ (ή $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ όπου $\mathcal{B}$ μια C* άλγεβρα με μονάδα) που είναι αυτοσυζυγής και περιέχει την μονάδα.

Θέτουμε $\mathcal{S}^+ = \mathcal{B}^+ \cap \mathcal{S}$. Παρατηρείστε ότι ένα σύστημα τελεστών παράγεται από τα θετικά στοιχεία που περιέχει: Κάθε $v \in \mathcal{S}$ γράφεται (μοναδικά) $v = v_1 + iv_2$ όπου τα $v_1 = \frac{1}{2}(v + v^*)$ και $v_2 = \frac{1}{2i}(v - v^*)$ ανήκουν στο $\mathcal{S}$. Και κάθε αυτοσυζυγές $v \in \mathcal{S}$ γράφεται (όχι μοναδικά) $v = v_p - v_n$ με $v_p, v_n \in \mathcal{S}_+$: πράγματι, μπορούνε να γράψουμε $v_p := v + \|v\|\mathbf{1} \in \mathcal{S}_+$ και $v_n = \|v\|\mathbf{1} - v \in \mathcal{S}_+$ αφού $-\|v\|\mathbf{1} \leqslant v \leqslant \|v\|\mathbf{1}$.

Αν $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$ είναι σύστημα τελεστών, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο χώρος $M_n(\mathcal{S}) \subseteq M_n(\mathcal{B})$ είναι σύστημα τελεστών, αν εφοδιασθεί με την δομή (ενέλιξη, μονάδα και θετικό κώνο $M_n(\mathcal{S})^+ := M_n(\mathcal{B})^+ \cap M_n(\mathcal{S})$) που κληρονομεί από την C* άλγεβρα $M_n(\mathcal{B})$.

Αν $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ είναι συστήματα τελεστών, μια γραμμική απεικόνιση $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ λέγεται θετική αν $\varphi(\mathcal{S}^+) \subseteq \mathcal{T}^+$ και πλήρως θετική αν για κάθε n η απεικόνιση $\varphi^n : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(\mathcal{T}) : [x_{ij}] \mapsto [\varphi(x_{ij})]$ είναι θετική.

Συμβολισμοί. Αν $\mathcal{S}$ είναι σύστημα τελεστών και $\phi : \mathcal{S} \to M_n(\mathbb{C})$ γραμμική, ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $s_\phi : M_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$s_\phi(A) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi(a_{i,j}) e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]}, \quad A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{S}) \tag{+}$$

όπου $\{e_j\}_{j=1}^n$ η κανονική βάση του $\ell^2[n]$.

Ισοδύναμα, θέτοντας $u = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus \ldots \oplus e_n \in \ell^2[n^2]$, έχουμε, για κάθε $A = [a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{S})$

$$\boxed{s_\phi(A) = \langle \phi^{(n)}(A) u, u \rangle_{\ell^2[n^2]} = \langle [\phi(a_{i,j})] u, u \rangle_{\ell^2[n^2]},}$$

όπου $\phi^{(n)}(A) = [\phi(a_{i,j})] \in M_n(M_n(\mathbb{C}))$. Δηλαδή

$$s_\phi : M_n(\mathcal{S}) \xrightarrow{\phi^n} M_n(M_n(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{B}(\ell^2[n^2]) \xrightarrow{\omega_u} \mathbb{C}$$

όπου $\omega_u(T) := \langle Tu, u \rangle_{\ell^2[n^2]}$.

Προφανώς η απεικόνιση $\phi \to s_\phi : \mathcal{L}(\mathcal{S}, M_n(\mathbb{C})) \to \mathcal{L}(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$ είναι γραμμική.

Τέλος, αν $s : M_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ είναι γραμμική, ορίζουμε $\phi_s : \mathcal{S} \to M_n$ ως εξής

$$\langle \phi_s(a) e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]} = (\phi_s(a))_{(i,j)} = s(a \otimes E_{i,j}), \quad a \in \mathcal{S}$$

$$\text{δηλ. } \phi_s(a) = \sum_{i,j=1}^{n} s(a \otimes E_{i,j}) E_{ij}$$

$$\text{δηλαδή } \boxed{\phi_s(a) = [s(a \otimes E_{i,j})] \in M_n}$$

ο πίνακας που έχει στην (i, j) θέση το $s(a \otimes E_{i,j}) \in \mathbb{C}$, όπου $a \otimes E_{i,j}$ το στοιχείο του $M_n(\mathcal{S})$ που έχει στην (i, j)-θέση το a και 0 αλλού.

Παρατηρούμε ότι οι απεικονίσεις $\phi \mapsto s_\phi$ και $s \mapsto \phi_s$ είναι η μία αντίστροφη της άλλης:
Έστω $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S}, M_n(\mathbb{C}))$ και $s \in \mathcal{L}(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$. Θα δείξουμε ότι $s_{\phi_s} = s$ και $\phi_{s_\phi} = \phi$. Παίρνουμε $[a_{i,j}] \in M_n(\mathcal{S})$ και υπολογίζουμε

$$s_{\phi_s}([a_{k,l}]) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle \phi_s(a_{i,j}) e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]} = \sum_{i,j=1}^{n} s(a_{i,j} \otimes E_{i,j}) = s([a_{k,l}]) \, .$$

Επίσης, για κάθε $a \in \mathcal{S}$ και για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$(\phi_{s_\phi}(a))_{(i,j)} = s_\phi(a \otimes E_{i,j}) = \langle \phi(a) e_j, e_i \rangle_{\ell^2[n]} = (\phi(a))_{(i,j)}$$

(απο την $(+)$), άρα έχουμε τα ζητούμενα.

Θεώρημα 2 (Arveson correspondence)**.** *Έστω $\mathcal{S}$ ένα σύστημα τελεστών, $n \in \mathbb{N}$ και $\phi : \mathcal{S} \to M_n(\mathbb{C})$ γραμμική. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα :*

(1) Η $\phi : \mathcal{S} \to M_n(\mathbb{C})$ είναι πλήρως θετική.

(2) Η $\phi : \mathcal{S} \to M_n(\mathbb{C})$ είναι n-θετική.

(3) Η $s_\phi : M_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ είναι θετική.

Συνεπως η απεικονιση

$$CP(\mathcal{S}, M_n(\mathbb{C})) \to CP(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$$

ειναι αμφιμονοσημαντη απο το συνολο $CP(\mathcal{S}, M_n(\mathbb{C}))$ των πληρως θετικων απεικονισεων στο συνολο των θετικων (αρα αυτοματως πληρως θετικων - δειτε την Προταση 1) απεικονισεων $CP(M_n(\mathcal{S}), \mathbb{C})$.

Απόδειξη. (1) $\Rightarrow$ (2) Προφανές.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι n-θετική, δηλαδή η $\phi^{(n)} : M_n(\mathcal{S}) \to M_n(M_n(\mathbb{C})) = M_{n^2}(\mathbb{C})$ στέλνει τον $M_n(\mathcal{S})^+$ στον $M_{n^2}(\mathbb{C})^+$. Έστω $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{S})^+$. Πρέπει να δείξουμε ότι $s_\phi(A) \in \mathbb{R}^+$.

Από την υπόθεση έχουμε $\phi^{(n)}(A) \in M_{n^2}(\mathbb{C})^+ = \mathcal{B}(\ell^2[n^2])^+$, οπότε $\langle \phi^{(n)}(A)y, y\rangle \geqslant 0$ για κάθε $y \in \ell^2[n^2]$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα αυτή στο διάνυσμα $u = e_1 \oplus e_2 \oplus e_3 \oplus ... \oplus e_n \in \ell^2[n^2]$, βρίσκουμε

$$s_\phi(A) = \langle \phi^{(n)}(A)u, u\rangle \geqslant 0$$

όπως θέλαμε.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Υποθέτουμε ότι η $s = s_\phi$ είναι θετική, δηλ. ικανοποιεί $s(Y) \geqslant 0$ για κάθε $Y \in M_n(\mathcal{S})^+$. Για να δείξουμε ότι η ϕ είναι πλήρως θετική, αν δοθεί $m \in \mathbb{N}$ πρέπει να δείξουμε ότι η $\phi^{(m)} : M_m(\mathcal{S}) \to M_m(M_n(\mathbb{C})) = M_{mn}(\mathbb{C})$ είναι θετική. Δηλαδή, για κάθε $X = [x_{ij}] \in M_m(\mathcal{S})^+$, πρέπει να δείξουμε ότι το $\phi^{(m)}([x_{ij}]) \in M_m(M_n(\mathbb{C}))$ είναι θετικός $mn \times mn$ πίνακας. Έχουμε $\phi^{(m)}([x_{ij}]) = [\phi(x_{ij})]$. Για κάθε διάνυσμα-στήλη $\xi \in \ell^2[mn]$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$\langle [\phi(x_{ij})]\xi, \xi\rangle_{\ell^2[mn]} \geqslant 0\,.$$

Γράφουμε το $\xi \in \ell^2[mn]$ ως μια m-στήλη $\xi = \begin{bmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_m\end{bmatrix}$ από n-στήλες, όπου κάθε $\xi_j := [\xi_j(1), \ldots, \xi_j(n)]^\dagger$ είναι διάνυσμα στήλη στον $\ell^2[n]$ (το $\dagger$ συμβολίζει τον ανάστροφο). Αν θυμηθούμε ότι ο $[\phi(x_{ij})]$ είναι $m \times m$ (block) πίνακας με στοιχεία $\phi(x_{ij})$ από την $M_n(\mathbb{C})$, [2] έχουμε

$$\langle [\phi(x_{ij})]\xi, \xi\rangle_{\ell^2[mn]} = \sum_{i,j=1}^m \langle \phi(x_{ij})\xi_j, \xi_i\rangle_{\ell^2[n]} \stackrel{(*)}{=} \sum_{i,j=1}^m s(\xi_i^* x_{ij}\xi_j)\,.$$

Η ισότητα $(*)$ προκύπτει από την ακόλουθη Παρατήρηση:

Παρατήρηση. Αν $h = [h_1, \ldots, h_n]$ and $k = [k_1, \ldots, k_n]$ είναι στον $\ell^2[n]$, για κάθε $x \in \mathcal{S}$ έχουμε, εφόσον $\phi(x) \in \mathcal{B}(\ell^2[n])$,

$$\begin{aligned}\langle \phi(x)h^\dagger, k^\dagger\rangle_{\ell^2[n]} &= \langle \phi(x)\sum_j h_j e_j, \sum_i k_i e_i\rangle_{\ell^2[n]} = \sum_{i,j=1}^n h_j \bar{k}_i \langle \phi(x)e_j, e_i\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^n \langle \phi(\bar{k}_i x h_j)e_j, e_i\rangle \quad (\text{ κάθε } \phi(\bar{k}_i v h_j) \in M_n(\mathbb{C})) \\ &= s([\bar{k}_i x h_j]_{n\times n}) = s(k^* x h)\end{aligned}$$

όπου k^* είναι το διάνυσμα-στήλη $[\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n]^\dagger$, οπότε το $k^*xh \in M_n(\mathcal{S})$ είναι ο πίνακας με i, j συντεταγμένη $\bar{k}_i x h_j$. [3]

Έχουμε λοιπόν

$$\langle [\phi(x_{ij}]\xi, \xi\rangle_{\ell^2[mn]} = \sum_{i,j=1}^m s(\xi_i^* x_{ij}\xi_j) = s\left(\sum_{i,j=1}^m \xi_i^* x_{ij}\xi_j\right)\,.$$

[2] Για παράδειγμα, αν $m = 3$:

$$\phi^{(3)}([x_{kl}]) = [\phi(x_{kl})] = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{bmatrix} \qquad (\text{κάθε } A_{kl} = \phi(x_{kl}) \in M_n(\mathbb{C})).$$

[3] Για παράδειγμα, αν n=2

$$[\bar{k}_i x h_j] = \begin{bmatrix}\bar{k}_1 x h_1 & \bar{k}_1 x h_2\\ \bar{k}_2 x h_1 & \bar{k}_2 x h_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{k}_1\\ \bar{k}_2\end{bmatrix} x \begin{bmatrix}h_1 & h_2\end{bmatrix}$$

που είναι $(n \times 1)(1 \times 1)(1 \times n)$

Όμως, αν ονομάσουμε $A \in M_{mn}(\mathbb{C})$ τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} \xi_1(1) & \dots & \xi_1(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_m(n) & \dots & \xi_m(n) \end{bmatrix}$ που οι m γραμμές του είναι τα διανύσματα $\xi_1, \dots, \xi_m$ (θυμόμαστε ότι κάθε ξ_j είναι στον $\ell^2[n]$), τότε το $\sum\limits_{i,j=1}^{m} \xi_i^* x_{ij} \xi_j \in M_n(\mathcal{S})$ είναι το γινόμενο πινάκων A^*XA. Εφόσον από την υπόθεση έχουμε ότι $X \in M_m(\mathcal{S})^+$, έπεται ότι $A^*XA \in M_n(\mathcal{S})^+$, και άρα το $s(A^*XA)$ είναι μη αρνητικό, όπως θέλαμε.

Δεύτερη απόδειξη της $(3) \Rightarrow (1)$: Υποθέτουμε ότι η $s = s_\phi : M_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ είναι θετική.
Αν $\mathcal{A}$ είναι C*-άλγεβρα με μονάδα που περιέχει το $\mathcal{S}$, τότε το $M_n(\mathcal{S})$ είναι σύστημα τελεστών στην C*-άλγεβρα $\mathcal{B} := M_n(\mathcal{A})$ και η $s : M_n(\mathcal{S}) \to \mathbb{C}$ είναι θετική. Από το Θεώρημα επέκτασης του Krein (!) (δείτε αργότερα) η s επεκτείνεται σε μια *θετική* γραμμική μορφή $\tilde{s} : \mathcal{B} \to \mathbb{C}$.

Συμβολίζουμε (π, H, ξ) την τριάδα GNS που αντιστοιχεί στην $\tilde{s}$, οπότε $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}(H)$ και

$$\tilde{s}(A) = \langle \pi(A)\xi, \xi \rangle \quad \forall A = [a_{ij}] \in M_n(\mathcal{A}).$$

Υπενθυμιζουμε οτι $M_n(\mathcal{S}) \simeq \mathcal{S} \otimes M_n(\mathbb{C})$ οποτε $a \otimes E_{ij} \in M_n(\mathcal{S})$ ειναι ο πινακας που εχει το $a \in \mathcal{S}$ στην (i,j) θεση, και μηδενικα παντου αλλου.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$V : \ell^2[n] \to H : e_j \mapsto \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1j})\xi, \ j = 1, \dots, n\,.$$

Ισχυρίζομαι ότι

$$\phi(a) = V^*\pi(a \otimes I_n)V \quad \forall a \in \mathcal{S}.$$

Πράγματι, αν $a \in \mathcal{S}$, για κάθε $i, j \in [n]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle V^*\pi(a \otimes I_n)Ve_j, e_i \rangle &= \langle \pi(a \otimes I_n)Ve_j, Ve_i \rangle \\
&= \langle \pi(a \otimes I_n)\pi(\mathbf{1} \otimes E_{1j})\xi, \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1i})\xi \rangle \\
&= \langle \pi(a \otimes E_{1j})\xi, \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1i})\xi \rangle \\
&= \langle \pi(\mathbf{1} \otimes E_{1i})^*\pi(a \otimes E_{1j})\xi, \xi \rangle \\
&= \langle \pi((\mathbf{1} \otimes E_{i1})(a \otimes E_{1j}))\xi, \xi \rangle \\
&= \langle \pi(a \otimes E_{ij})\xi, \xi \rangle \\
&= \tilde{s}(a \otimes E_{ij}) = s(a \otimes E_{ij}) = \langle \phi(a)e_j, e_i \rangle
\end{aligned}$$

για κάθε $i, j \in [n]$, και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Δείξαμε λοιπόν ότι η ϕ είναι η σύνθεση των πλήρως θετικών απεικονίσεων

$$a \mapsto a \otimes I_n \mapsto \pi(a \otimes I_n) \mapsto V^*\pi(a \otimes I_n)V\,,$$

άρα είναι πλήρως θετική. □

3 Η περίπτωση $\phi : V \to \mathbb{C}$

Πρόταση 1. *Αν V ειναι συστημα τελεστών, καθε θετικη γραμμικη μορφη $\phi : V \to \mathbb{C}$ ειναι πληρως θετικη.*

Απόδειξη. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Πρεπει να δειξουμε οτι αν $A = [a_{ij}] \in M_n(V)_+$ τοτε $\phi^n(A) \in M_n(\mathbb{C})_+$, δηλαδη οτι για καθε $y = [y_1, \dots, y_n]^\dagger \in \ell^2[n]$ εχουμε $\langle \phi^n(A)y, y \rangle \geqslant 0$. Υπολογιζουμε

$$\langle \phi^n(A)y, y \rangle = \langle [\phi(a_{ij})]y, y \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \bar{y}_i \phi(a_{ij}) y_j = \phi\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{y}_i a_{ij} y_j \right).$$

Αλλα αφου ο πινακας $A = [a_{ij}]$ ειναι θετικο στοιχειο του $M_n(V)$, το

$$\sum_{i,j=1}^{n} \bar{y}_i a_{ij} y_j = \begin{bmatrix} \bar{y}_1 & \dots & \bar{y}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{ij} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = y^* A y$$

(γινομενο πινακων) ειναι θετικο στοιχειο του V και συνεπως

$$\phi\left(\sum_{i,j=1}^{n} \bar{y}_i a_{ij} y_j\right) \geqslant 0$$

γιατι η ϕ ειναι θετικη. $\square$