Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

Χειμερινό εξάμηνο 2024-2025

Εργασία: Υπολογισμός Αντιστρόφου Πίνακα

Μέρος I: Θεωρητική Επεξεργασία

- Έστω πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ για τον οποίο υπάρχει ο αντίστροφος

1. Να γραφεί αλγόριθμος InvGJ (Inverse Gauss-Jordan) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου πίνακα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gauss-Jordan με μερική οδήγηση. Να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα της μεθόδου.

2. Θεωρητικά, η εύρεση αντιστρόφου πίνακα μπορεί να υπολογισθεί από τον αναλυτικό τύπο $A^{-1} = \frac{1}{detA} adjA$, όπου $detA$ είναι η ορίζουσα του πίνακα $A = [\alpha_{i,j}]$

$$adjA = \begin{bmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix}$$

ο συμπληρωματικός (adjoint) του $A, A = [\alpha_{i,j}] = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ και $M_{i,j}$ η ορίζουσα του υποπίνακα του A που προκύπτει απο τη διαγραφή της i-γραμμής και j-στήλης του. Η ορίζουσα του A υπολογίζεται από το ανάπτυγμα Laplace $detA = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} A_{i,j}$

Να αναπτυχθεί θεωρητικά ο αλγόριθμος InvLap (Inverse Laplace) για τον υπολογισμό του αντιστρόφου πίνακα χρησιμοποιώντας τον παραπάνω αναλυτικό τύπο και το ανάπτυγμα Laplace και να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα του.

Υπόδειξη: Θα είναι της τάξης $O(n!)$

3. Ο τύπος Stirling εκτιμά για μεγάλο n την τιμή $n!$. Συγκεκριμένα,

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n, n >>$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling και υποθέτοντας ότι ο υπολογιστής εκτελεί κάθε πράξη (1 flop) σε 10^{-5} sec, να εκτιμηθεί ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό του αντιστρόφου πινάκων διάστασης: 100, 500, 1000, 5000
α) με τον αλγόριθμο InvGJ
β) με τον αλγόριθμο InvLap.

Μέρος II: Υπολογισμός-Εκτίμηση της διαγωνίου Αντιστρόφου πίνακα

Έστω ένας συμμετρικός πίνακας $A = [\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n\ ] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, θετικά ορισμένος. Τα διαγώνια στοιχεία του αντιστρόφου του πίνακα A που μπορούν να εκτιμηθούν από τους ακόλουθους τύπους:

- $EST1 = \frac{1}{a_{ii}}$
- $EST2 = \frac{a_{ii}}{a_i^T a_i}$
- $EST3 = \frac{1}{a_{ii}}\{(\frac{a_i^T a_i}{a_{ii}^2})^{p_1}(\frac{a_i^T a_i}{a_{ii}^2})^{p_2}\dots(\frac{a_i^T a_i}{a_{ii}^2})^{p_l}\}$, όπου $p_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, l$ επιλέγονται αυθαίρετα

1. Να εκτιμηθεί η πολυπλοκότητα που απαιτείται για τον υπολογισμό των παραπάνω εκτιμήσεων.
2. Να γίνει η οικονομικότερη δυνατή υλοποίηση των παραπάνω τύπων στη JULIA.
3. Να γίνει η ανάλυση σφάλματος για την EST3. Είναι ευσταθής;
4. Να συγκρίνετε την τιμή που προκύπτει από τους τύπους των εκτιμήσεων που δόθηκαν παραπάνω με την ακριβή τιμή.
   Η σύγκριση να γίνει με βάση:

- Το αντίστοιχο μέσο σχετικό σφάλμα (MRE) των εκτιμήσεων των διαγωνίων στοιχείων που δίνεται από τον τύπο:

  $$MRE = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{|(A^{-1})_{ii} - est(i)|}{|(A^{-1})_{ii}|}$$

  όπου η θεωρητική τιμή του διαγωννίου στοιχείου A_{ii}^{-1} θα βρίσκεται από ην συνάρτηση *inv* της JULIA,
- Τον αριθμό των απαιτούμενων γινομένων πινάκων-διανυσμάτων (mvp's),
- Τον απαιτούμενο χρόνο εκτέλεσης (με χρηση της συνάρτησης *time* της JULIA)

Σημείωση: Για την EST3 να προσδιοριστούν πιθανές τιμές καθώς και το πλήθος των απαιτούμενων p_i που δίνουν τις καλύτερες εκτιμήσεις.

Πίνακες Δοκιμής

1. Πίνακας KMS

Ο πίνακας Kac-Murdock-Szegö (KMS) A διάστασης n είναι συμμετρικός, θετικά ορισμένος και Toeplitz. Τα στοιχεία αυτού του πίνακα δίνονται από τον τύπο:

$$A_{ij} = 0.2^{|i-j|}, i, j = 1, 2, ..., n$$

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε όλα τα διαγώνια στοιχεία του A είναι ίσα με το 1.
Ο πίνακας αυτός υπάρχει στο πακέτο "MatrixDepot" της JULIA και καλείται με την εντολή A= matrixdepot("kms",n,0.2).
Να δοκιμαστούν πίνακες διάστασης n= 100 : 5000.

2. Πίνακας Συνδιακύμανσης (Model Covariance Matrix)

Ο πίνακας συνδιακύμανσης (Covariance Matrix) A διάστασης n είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Τα στοιχεία του πίνακα συνδιακύμανσης προσομοιώνονται από:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 + i^a & \text{if } i = j \\ \dfrac{1}{|i-j|^b} & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

$i = 1, 2, ..., n$
όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\beta \geq 1$.
Να δοκιμαστούν πίνακες διάστασης n=100: 5000 με τιμές των παραμέτρων $\alpha = -5 : \frac{1}{2} : 5$ και $\beta = 1 : \frac{1}{2} : 5$.

3. Τυχαίοι πίνακες που χρησιμοποιούνται στην στατιστική

Ειδικότερα θέλουμε να ασχοληθούμε με πίνακες η οποίοι να ακολουθούν την κανονική κατανομή και να έχουν μέση τιμή ίση με το 0.

$X = [\ x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n\ ]$, $X \in \mathbb{R}^{m \times n}, m \geq n$ υπερκαθορισμένος (overdetermined)
Ισχύει ακόμα: $x_j \sim N(O, I)$
Τον πίνακα μπορούμε να τον φτιάξουμε χρησιμοποιώντας το πακέτο "Distributions" της JULIA και πιο συγκεκριμένα με την εντολή:
A= rand(Normal(0, 1), r), όπου r είναι το πλήθος γραμμών.

- Να υπολογίσετε τη διαγώνιο του $(X^T X)$, όπου X ο πίνακας που περιγράφουμε παραπάνω.