511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 3
(Ημερομηνία Παράδοσης: 31 Οκτωβρίου 2005)

1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συνόλων από την $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι:

(α) $\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(β) Αν $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ τότε $\limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)$.

(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ τότε $\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

2. Έστω $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$: δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

3. Έστω μ ένα σ–πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ το σύνολο $\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

4. Έστω μ ένα ημιπεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Δείξτε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \infty$ τότε, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subset A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

5. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το $E \subseteq X$ είναι *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X \mid E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ–άλγεβρα. Αν $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ τότε λέμε ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι *κορεσμένος χώρος μέτρου*.

(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ–πεπερασμένο τότε $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

(γ) Ορίζουμε $\tilde{\mu}$ στην $\tilde{\mathcal{A}}$ θέτοντας $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ αν $A \in \mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A) = \infty$ αν $A \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

8. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.