511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 2
(Ημερομηνία Παράδοσης: 21 Οκτωβρίου 2005)

1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j\right).$$

Δείξτε τα εξής:
(α) $\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n$ για άπειρες τιμές του $n\}$.
(β) $\liminf A_n = \{x \in X :$ υπάρχει $n_0(x) \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in A_n$ για κάθε $n \geq n_0\}$.
(γ) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. Δώστε παράδειγμα στο οποίο ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο με άπειρα στοιχεία. Ορίζουμε

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \text{το } A \text{ έχει δύο στοιχεία}\}.$$

Περιγράψτε τις $\sigma(\mathcal{F})$ και $m(\mathcal{F})$.

3. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και έστω $f : X \to Y$. Δείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο Y.
(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και έστω $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Δείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.
(γ) Έστω (X, ρ) και (Y, d) μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X.

4. (α) Δείξτε ότι η Borel σ–άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών ημιχώρων της μορφής $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_j > a_j\}$, όπου $j = 1, \ldots, n$ και $a_j \in \mathbb{R}$.
(β) Έστω $\mathcal{F} = \{B(x, r) \mid x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ ($B(x, r)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r). Δείξτε ότι η Borel σ–άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από την $\mathcal{F}$.

5. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

6. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $\{x \in \mathbb{R}^n \mid$ η f είναι συνεχής στο $x\}$ είναι G_δ σύνολο.
(β) Έστω $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ($k = 1, 2, \ldots$). Δείξτε ότι το

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{υπάρχει το } \lim_{k\to\infty} f_k(x)\}$$

είναι $F_{\sigma\delta}$ σύνολο, δηλαδή, αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων.

7. Έστω $\mathcal{F}$ μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του μη κενού συνόλου X. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{C}_A$ της $\mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.