511. ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005–06)
ΑΣΚΗΣΕΙΣ – ΦΥΛΛΑΔΙΟ 1
(Ημερομηνία Παράδοσης: 14 Οκτωβρίου 2005)

1. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $g_\varepsilon:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη ώστε $|f(x)-g_\varepsilon(x)|<\varepsilon$ για κάθε $x\in[0,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

2. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0<b\le 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

3. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1<b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1-a_1<1$ και
$$\sup\{f(x):a_1\le x\le b_1\}-\inf\{f(x):a_1\le x\le b_1\}<1.$$

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $a_2<b_2$ στο (a_1,b_1) ώστε $b_2-a_2<1/2$ και
$$\sup\{f(x):a_2\le x\le b_2\}-\inf\{f(x):a_2\le x\le b_2\}<\frac{1}{2}.$$

(γ) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n,b_n]\subseteq(a_{n-1},b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$, ώστε
$$\sup\{f(x):a_n\le x\le b_n\}-\inf\{f(x):a_n\le x\le b_n\}<\frac{1}{n}.$$

(δ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(ε) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$.

4. Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x)>0$ για κάθε $x\in[a,b]$. Δείξτε ότι
$$\int_a^b f(x)dx>0.$$

5. Εξετάστε αν είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ με
$$f(x)=\begin{cases}0 & ,\ x\notin\mathbb{Q}\text{ ή } x=0\\[2ex] \frac{1}{q} & ,\ x=\frac{p}{q},\ p,q\in\mathbb{N},\ \mathrm{MK\Delta}(p,q)=1.\end{cases}$$

6. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^nf(x)\,dx=f(1).$$

7. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας
$$a_n=\int_0^1 f(x^n)dx.$$
Δείξτε ότι $a_n\to f(0)$.

8. Έστω $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nf(x)e^{-nx}\,dx=f(0).$$