ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005-06)

2 Φεβρουαρίου 2006

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν το B είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

(1,5μ)

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Δίνονται $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ για τα οποία $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$. Δείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

(1,5μ)

3. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lambda((a,b)\setminus E) \geq \frac{b-a}{2}$ για κάθε ανοικτό διάστημα $(a,b) \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

(1,5μ)

4. Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geq 1$.

(2μ)

5. Δίνονται: ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, μια ακολουθία $\{E_n\}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του X, και ένας φυσικός αριθμός k. Θεωρούμε το σύνολο B όλων των $x \in X$ που ανήκουν σε τουλάχιστον k από τα σύνολα E_n. Δείξτε ότι το B είναι μετρήσιμο και ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq k\,\mu(B).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$.

(1,5μ)

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \delta$, τότε $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

(1,5μ)

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $A_n, A \in \mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο και ότι $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση, δείξτε πρώτα ότι

$$\int_{A_n} f\, d\mu \to \int_A f\, d\mu.$$

(2μ)

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $f_n, f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\int_X g\, d\mu < \infty$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

(1,5μ)

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις συνοπτικές σημειώσεις του μαθήματος (κανένα άλλο βοήθημα).

Καλή επιτυχία!
