Θεωρία Μέτρου (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 4

(Παραδίδετε δέκα από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 24 Ιανουαρίου 2021)

1. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, ακολουθία Lebesgue ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο.

(α) Αν $\int f_n \, d\lambda = 0$ για κάθε n, ισχύει τότε $\int |f_n| \, d\lambda \to 0$;

(β) Με κάθε μία από τις παρακάτω τρεις συνθήκες, εξετάστε αν ισχύει $\int f_n \, d\lambda \to 0$.

(i) $|f_n| \leqslant 1$ και $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}) \leqslant 1$ για κάθε n.

(ii) $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και κάθε n.

(iii) $f_n \geqslant 0$ και $\int f_n \, d\lambda \leqslant 1$ για κάθε n.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Αποδείξτε ότι το μ είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν: «$\mu(X) = \sup\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}, \mu(A) < \infty\}$ και για κάθε ακολουθία (f_n) μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων με $f_n \to 0$ ομοιόμορφα, ισχύει $\int f_n d\mu \to 0$».

3. Έστω $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: υπάρχει $\alpha > 0$ τέτοιος ώστε

$$\left| \frac{g(t)}{t} \right| \leqslant \alpha$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_1^t f(s) g(s) \, d\lambda(s) = 0.$$

4. Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με την ιδιότητα

$$\int_E |f_n| \, d\lambda \leqslant \sqrt{\lambda(E)}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε μετρήσιμο υποσύνολο E του $[0, 1]$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, αποδείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και ότι

$$\int_0^1 f_n \, d\lambda \to \int_0^1 f \, d\lambda.$$

5. Σωστό ή λάθος; Έστω $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f_n \to 0$ κατά σημείο και

$$\int_{[0,1]} f_n \, d\lambda = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε,

$$\int_{[0,1]} \big(\sup_n f_n \big) \, d\lambda = \infty.$$

6. Έστω $f \in L^1(\mathbb{R})$. Υπολογίστε το

$$\lim_{t \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) + f(x)| \, d\lambda(x).$$

[*Υπόδειξη:* Προσεγγίστε την f με συνεχείς συναρτήσεις που έχουν συμπαγή φορέα.]

7. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, σχεδόν για κάθε $x \in [0,1]$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f(x+n)$ συγκλίνει.

8. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και f, g μη αρνητικές Lebesgue ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο E. Δείξτε ότι

$$\int_E f \cdot g \, d\lambda = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\{x \in E : g(x) \geqslant y\}} f(x) d\lambda(x) \right) d\lambda(y).$$

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ χώροι σ-πεπερασμένου μέτρου. Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση και $g : Y \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η $h : X \times Y \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = f(x)g(y)$ είναι $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-μετρήσιμη και ότι αν $f \in \mathcal{L}^1(\mu), g \in \mathcal{L}^1(\nu)$ τότε $h \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$ και

$$\int_{X \times Y} h \, d(\mu \times \nu) = \int_X f \, d\mu \cdot \int_Y g \, d\nu.$$

10. Εξετάστε αν η συνάρτηση $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (με $f(0,0) = 0$) είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη στο $[-1,1] \times [-1,1]$.

11. Έστω μ μέτρο Borel στον $\mathbb{R}$.

(α) Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ συνάρτηση και $\int_{(-\infty,t)} f \, d\mu = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f = 0$ μ-σχεδόν παντού.

(β) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο, $\mu \neq 0$, και B είναι σύνολο Borel στον $\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι: $\lambda(B) = 0$ αν και μόνο αν $\mu(B+y) = 0$ λ-σχεδόν για κάθε $y \in \mathbb{R}$.

[*Υπόδειξη.* Για το (β) παρατηρήστε ότι έχει νόημα το $(\mu \times \lambda)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \in B\})$ και υπολογίστε το.]

12. Έστω (f_n) ακολουθία μη αρνητικών συνεχών συναρτήσεων στο $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n μηδενίζεται έξω από το $[0, 1/n]$ και

$$\int_0^{1/n} f_n(t) \, dt = 1.$$

Έστω $g \in L^1(\mathbb{R})$. Ορίζουμε

$$g_n(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t) g(x-t) \, dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Δείξτε ότι $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ και

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} |g_n - g| \, d\lambda = 0.$$

13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu) = (Y, \mathcal{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu)$, όπου

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{αν } A \text{ αριθμήσιμο} \\ \infty, & \text{αν } A \text{ υπεραριθμήσιμο} \end{cases}.$$

Έστω $\pi : X \times Y \to X$ με $\pi(x,y) = x - y$ η προβολή του X παράλληλα στη διαγώνιο $\Delta = \{(x,x) : x \in X\}$ του $X \times Y = \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε $\rho, \tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to [0, \infty]$ από τις σχέσεις

$$\rho(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$\tau(C) = \begin{cases} 0, & \text{αν } C = A \cup B \cup D \text{ και } \pi_1(A), \pi_2(B), \pi(D) \text{ αριθμήσιμα} \\ \infty, & \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι:

(α) Τα ρ και τ είναι μέτρα στην $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

(β) $\rho(A \times B) = \tau(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

(γ) Για τη διαγώνιο Δ ισχύει $\Delta \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ και $\rho(\Delta) = \infty$, ενώ $\tau(\Delta) = 0$.

Έτσι, η μοναδικότητα του μέτρου γινομένου αποτυγχάνει δίχως την υπόθεση του $\sigma-$πεπερασμένου.

14. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, τα οποία είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές (δηλαδή, αν E είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\mu(E + x) = \mu(E)$ και $\nu(E+x) = \nu(E)$). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει Borel σύνολο $B \subset \mathbb{R}^n$ για το οποίο $0 < \mu(B) = \nu(B) < +\infty$. Δείξτε ότι $\mu \equiv \nu$.

15. Έστω μ και ν δύο σ-πεπερασμένα μέτρα στον $(X, \mathcal{A})$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν.

(β) Τα μ και ν έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου.

(γ) Υπάρχει $g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη με $0 < g(x) < \infty$ για κάθε $x \in X$, τέτοια ώστε $\nu(A) = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

16. Έστω μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{M})$. Δείξτε ότι υπάρχει πεπερασμένο μέτρο ν στον $(X, \mathcal{M})$ τέτοιο ώστε: το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το ν και το ν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μ.

17. Έστω μ μέτρο σε έναν μετρήσιμο χώρο $(X, \mathcal{A})$ και έστω (A_n) ακολουθία μετρήσιμων συνόλων ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Θέτουμε

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_n)} \cdot \chi_{A_n} \quad \text{και} \quad \nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Αποδείξτε ότι το ν είναι σ-πεπερασμένο μέτρο, απόλυτα συνεχές ως προς μ, και ισχύει $\nu(A_n) \geq 1$ για κάθε n.

18. Έστω μ και ν μέτρα Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε

$$\rho(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in A\})$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Το ρ είναι καλά ορισμένο μέτρο Borel πιθανότητας στο $\mathbb{R}$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\rho(A) = \int_{\mathbb{R}} \nu(A - x) \, d\mu(x).$$

(γ) Αν $\nu \ll \lambda$, τότε $\rho \ll \lambda$.