Θεωρία Μέτρου (2020–21)
Ασκήσεις – Φυλλάδιο 1

(Παραδίδετε έξι από τις ασκήσεις. Ημερομηνία παράδοσης: 30 Οκτωβρίου 2020)

1. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{I}_{\mathbb{Q}} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q}\}$. Να δείξετε ότι $\sigma(\mathcal{I}_{\mathbb{Q}}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. Έστω $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο σύνολο. Περιγράψτε όλες τις σ-άλγεβρες στο X.

3. (α) Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Αποδείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

(β) Δώστε παράδειγμα G_δ-συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι F_σ-σύνολο.

(γ) Δώστε παράδειγμα συνόλου Borel $A \subseteq \mathbb{R}$ που δεν είναι G_δ-σύνολο ούτε F_σ-σύνολο.

(δ) Έστω A και B κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι το $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ δεν είναι απαραίτητα κλειστό. Αποδείξτε όμως ότι είναι πάντα F_σ-σύνολο.

4. Έστω X ένα σύνολο και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ αριθμήσιμη ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

Υπόδειξη: Θεωρήστε την οικογένεια $\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) :$ υπάρχει $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{F}$ αριθμήσιμη με $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)\}$.

5. Έστω X ένα σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{M}$ υποσυνόλων του X λέγεται *μονότονη κλάση* στο X αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Είναι κλειστή στις αύξουσες ενώσεις, δηλαδή αν (A_n) είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε είναι και $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

(ii) Είναι κλειστή στις φθίνουσες τομές, δηλαδή αν (A_n) είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{M}$, τότε είναι και $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, συμβολίζουμε με $m(\Delta)$ τη μικρότερη μονότονη κλάση που περιέχει τη Δ (λέμε ότι η $m(\Delta)$ *παράγεται* από την Δ). Να αποδείξετε τα εξής:

(α) Κάθε κλάση Dynkin είναι μονότονη κλάση.

(β) Αν Δ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X, τότε $m(\Delta) \subseteq \delta(\Delta)$.

(γ) Υπάρχει μονότονη κλάση που δεν είναι κλάση Dynkin.

(δ) Αν Δ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε $m(\Delta) = \sigma(\Delta)$.

6. Έστω $(X,\mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X,\mathcal{A})$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{A}$ ισχύει $\mu_n(A) \leqslant \mu_{n+1}(A)$. Για $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A).$$

Να δείξετε ότι το μ είναι μέτρο στον $(X,\mathcal{A})$.

7. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $(A_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ το σύνολο $J_A = \{i \in I : \mu(A \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

8. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα σε ένα σύνολο X και μ ένα πεπερασμένο μέτρο στο χώρο $(X,\sigma(\mathcal{F}))$. Να δείξετε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε

$$\mu(A \triangle F) < \varepsilon,$$

όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$.

9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου και (A_n) μια ακολουθία υποσυνόλων του X για την οποία υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\mu(A_n) \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\mu(\limsup_n A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $\{k_n\}$ ώστε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \varnothing.$$

10. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πεπερασμένου μέτρου. Δείξτε ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στην $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.