Ανάλυση ΙΙ, 2/4/2026 [3h]

Γιώργος Παπαθανασίου

g.papathanasiou@phys.uoa.gr

Γραφείο Ι+4 # 15

Περίγραμμα Μαθήματος [~ Κεφάλαια Marsden–Tromba]

1. Διανύσματα σε ευκλείδιους χώρους
2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, παραγώγιση, καμπύλες
3. Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης, γραμμική προσέγγιση, ακρότατα
4. Διανυσματικές συναρτήσεις, απόκλιση + στροβιλισμός
5. Πολλαπλή (βαθμωτή) ολοκλήρωση ← Παρόν
6. Αλλαγές μεταβλητών + εφαρμογές ολοκλήρωσης
7. Επικαμπύλια + επιφανειακά ολοκληρώματα
8. Θεμελιώδη θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης

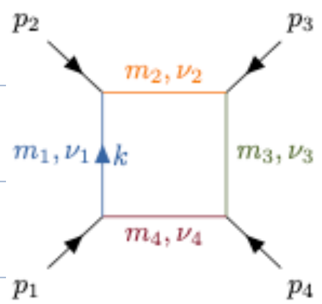
Χρησιμότητα ολοκλήρωσης

Π.χ. για τον υπολογισμό

- μάζας ή ηλ. φορτίου στερεού σώματος από πυκνότητα
- έργου δύναμης

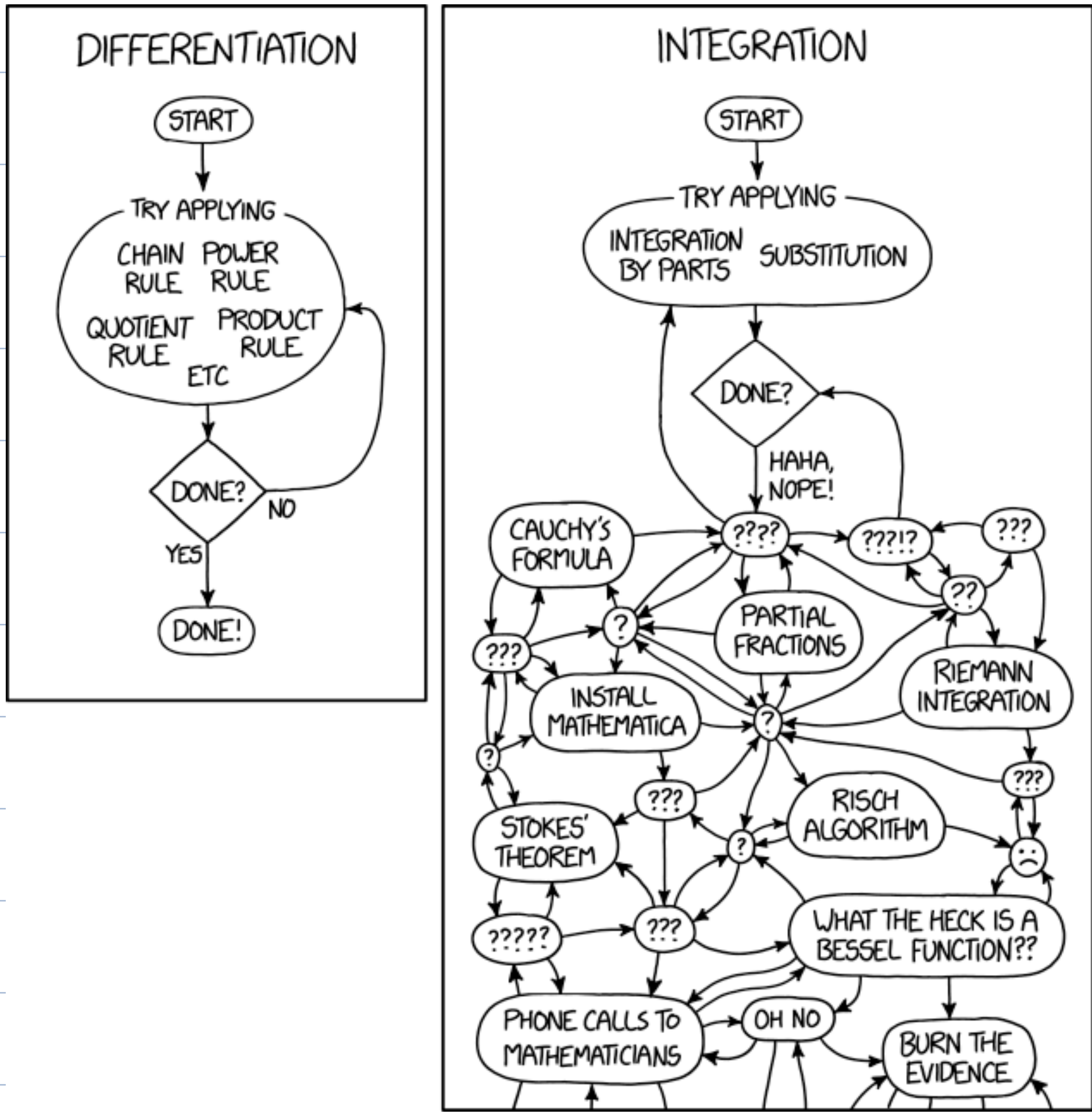
⋮

- προβλέψεων για πειράματα στοιχειωδών σωματιδίων



$$= \int \frac{d^d k}{(k^2 - m_1^2)^{\nu_1}[(k+p_1)^2 - m_2^2]^{\nu_2}[(k+p_1+p_2)^2 - m_3^2]^{\nu_3}[(k-p_4)^2 - m_4^2]^{\nu_4}}$$

Η διαφορά με την παραγώγιση



πηγή: xkcd

Η ολοκλήρωση <u>δεν</u> είναι εν γένει αλγοριθμική

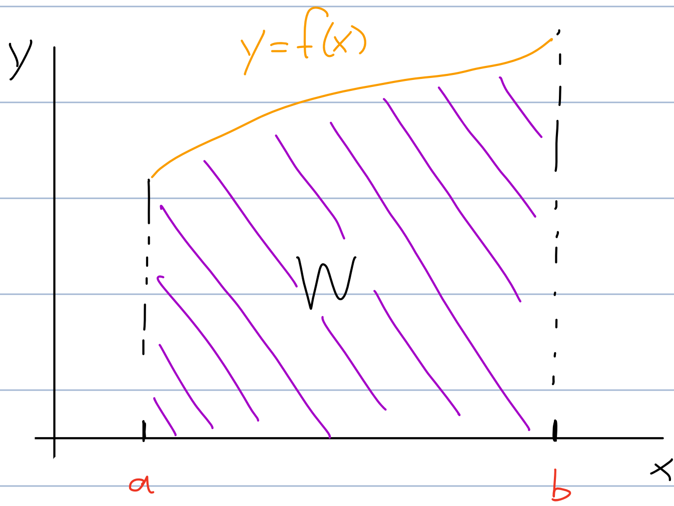
5.0: Επανάληψη σε απλά ολοκληρώματα

Βοήθημα: Σημειώσεις Ανάλυσης Ι από Σ. Νοτάρη (κεφ. 7)

Για συνεχή συνάρτηση $f(x)$, $x\in[a,b]$ με $f(x)\geq 0$,

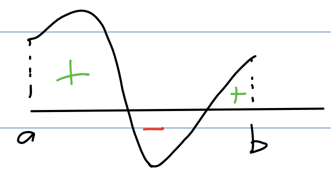
ορισμένο ολοκλήρωμα

$\int_a^b f(x)$ = εμβαδό χωρίου W



(πάνω από άξονα x, κάτω από γρ. παράσταση $y=f(x)$, ανάμεσα από ευθείες $x=a$, $x=b$)

Γενικότερα, προσημασμένο εμβαδό:



Αόριστο ολοκλήρωμα $F(x)=\int f(x)\,dx$:

Παραγωγ. συνάρτηση με ιδιότητα $F'(x)=f(x)$

← μεταβλητή

Σχέση με ορισμένο $\int$: $F(x)=\int_c^x f(x')\,dx'$

για οποιαδήποτε σταθερά $c\in[a,b]$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)}$$

2ο θεμελιώδες θεωρ. απειροστικού λογισμού

5.0.1 Στοιχειώδεις μέθοδοι ολοκλήρωσης

A. Βασικά ολοκληρώματα [Πρέπει να τα θυμόμαστε ή να μπορούμε να τα εξάγουμε]

i) $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$ $a \in \mathbb{R}$, $a \neq -1$

ii) $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x|$

iii) $\int e^x dx = e^x$

iv) $\int \sin x \, dx = -\cos x$

v) $\int \cos x = \sin x$

vi) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x$

vii) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x$

viii) $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$ ix) $\int \dfrac{1}{1+x^2} = \arcsin x$

Β. Ολοκλήρωση κατά παράγοντες (ή μέρη)

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

(και για αόριστα ολοκλ.)

Παράδειγμα: $\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e \ln x\,(x)'\,dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{x}\,dx$

$$= \Big[x\ln x - x\Big]_1^e = 1$$

Γ. Μέθοδος της αντικατάστασης

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du \qquad \left[\begin{array}{l}\text{θέτουμε } u = g(x)\\ \Rightarrow du = g'(x)\,dx\end{array}\right]$$

Παράδειγμα: $\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx \underset{du=\frac{dx}{x}}{\overset{u=\ln x}{=}} \int_{\ln 2}^{1} \frac{du}{u}$

$$= \Big[\ln u\Big]_{\ln 2}^{1}$$

Τέλος, αξιοποιούμε ιδιότητες ολοκληρωμάτων όπως

- $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
- $\int a\cdot f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ ...

Ασκήσεις Επανάληψης

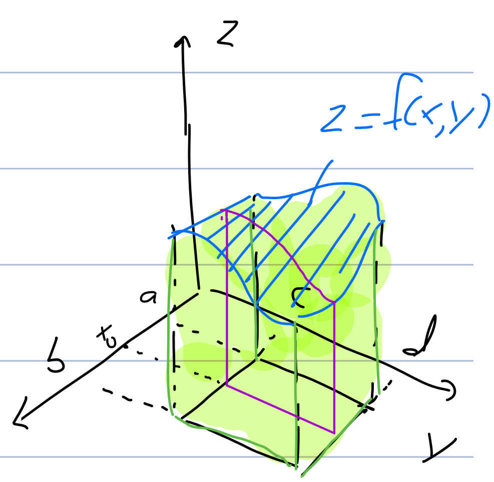
Υπολογίστε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

1. $\int_0^1 x^2 e^x \, dx$
2. $\int x \ln x \, dx$
3. $\int \ln^3 x \, dx$
4. $\int \sin^2 x \, dx$
5. $\int \sin^4 x \, dx$
6. $\int \sin^3 x \cos^4 x \, dx$

5.1 Εισαγωγή στα διπλά ολοκληρώματα

Έστω συνεχής συνάρτηση δύο μεταβλ. $f(x,y)$ με πεδίο ορισμού $(x,y) \in R = \underset{\substack{\cup \\ x}}{[a,b]} \times \underset{\substack{\cup \\ y}}{[c,d]} \subset \mathbb{R}^2$ ορθογώνιο

Αν $f(x,y) \geq 0$ τότε γρ. παράσταση:

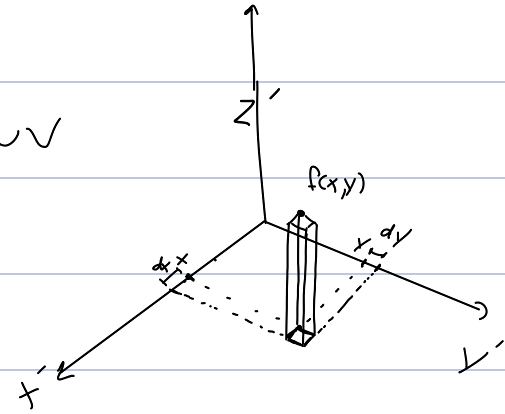


Σε αναλογία με απλό ολοκλήρωμα,

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \text{όγκος πάνω από } R \text{ και κάτω από γράφημα } f(x,y)}$$

«Άθροισμα» στοιχειωδών όγκων

$dV = f(x,y)\,dx\,dy$



Πώς υπολογίζεται στην πράξη;

$$\int_c^d f(x_0,y)\,dy =$$ εμβαδό διατομής επιπέδου $x = x_0$

$$\Rightarrow \boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \text{όγκος} = \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx}_{\text{όγκος «φέτας» πάχους } dx}}$$

Διαδοχικό ολοκλήρωμα:

1. Ολοκλήρωση ως προς y θεωρώντας x σταθερό
   Αποτέλεσμα δεν εξαρτάται πλέον από το y
2. Ολοκλήρωση ως προς x

Αναλόγως μπορούμε να θεωρήσουμε διατομές από επίπεδα $y = y_0$

$$\Rightarrow \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

Οι δύο διαδοχικές σειρές ολοκλήρωσης πρέπει να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα: Θεώρημα Fubini

Παράδειγμα 5.1.3: Για $R = [-1,1] \times [0,1]$, υπολογίστε

$$I = \iint_R (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2+y^2)\,dx\right]dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2 x\right]_{-1}^1 dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y^2 + \frac{1}{3} + y^2\right)dy = \int \left(\frac{2}{3} + 2y^2\right)dy$$

$$= \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Αντίστροφη φορά ολοκλήρωσης:

$$I = \int_{-1}^{1}\left[\int_{0}^{1} (x^2+y^2)\,dy\right]dx = \int_{-1}^{1}\left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(x^2+\frac{1}{3}\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

Πράγματι δίνει ίδιο αποτέλεσμα.

Ασκήσεις για επόμενη φορά: Υπολογίστε Μ.Τ. 5.1.1

(α) $\int_0^1\int_0^1 (1-x^3+xy)\,dx\,dy$

(β) $\int_0^{\pi/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \sin y\,dx\,dy$

(γ) $\int_1^2\int_2^4 \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)dx\,dy$

(δ) $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/4} \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx\,dy$

Θεώρημα Fubini: Αν $f: R = [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$

- φραγμένη : $\exists$ αριθμός $M > 0$ έτσι ώστε $-M < f(x,y) < M$ $\forall$ (x,y) στο πεδίο ορισμού της.

- σχεδόν-παντού συνεχής : Το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f έχει μηδενικό εμβαδό (ακολουθεί παράδειγμα)

Τότε

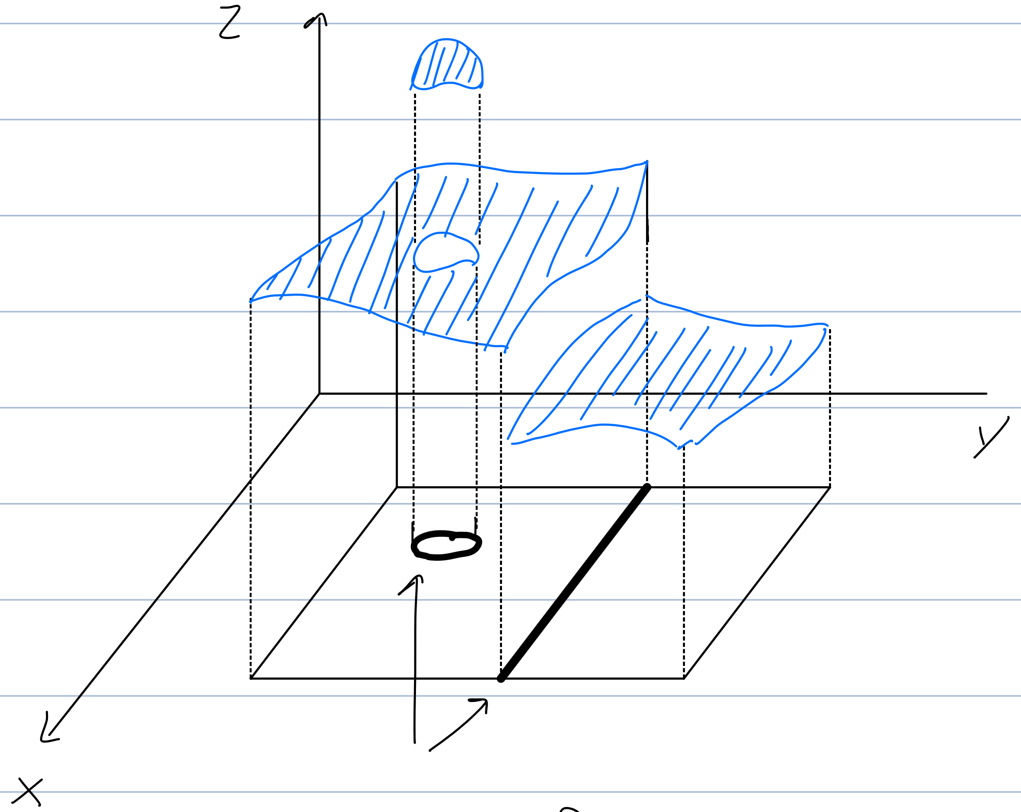
$$\boxed{\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \underbrace{\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]}_{F(x)} dx \\ &= \int_c^d \underbrace{\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]}_{G(y)} dy\end{aligned}}$$

αγκύλες [ ] συχνά απαλείφονται

μπορεί να υπολογιστεί ως διαδοχικά απλά ολοκληρώματα.

! Σε πολλές περιπτώσεις, μια σειρά είναι πολύ ευκολότερη της άλλης. Επιλέγουμε προσεκτικά.

Παράδειγμα σχεδόν-παντού συνεχούς συνάρτησης



ασυνέχειες της f: μονοδιάστατες καμπύλες μηδενικού εμβαδού.