

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ—19.09.2025

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ, Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΣ & Γ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Διάρκεια: 3 ώρες.

Οδηγίες: Γράψτε τα θέματα κάθε ενότητας σε διαφορετική κόλλα. Λύστε όλα τα θέματα. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής. Χρησιμοποιήστε πρόχειρο.

Τυπολόγιο: Δίνεται ότι $e^t = 1 + t + t^2/2 + t^3/6 + \dots$ και $\log(1+t) = t - t^2/2 + t^3/3 - t^4/4 + \dots$

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι

Θέμα 1 [10 μονάδες]. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια αν υπάρχουν· αν δεν υπάρχουν, να το δείξετε:

$$(α) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y^2}{x^2+y^4} \quad (β) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \log(1+y^2)}{y \log(1+x^2)}.$$

Θέμα 2 [30 μονάδες]. Έστω $r(x_1, \dots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ όπου n θετικός ακέραιος, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, και έστω συνάρτηση $\phi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη.

(1) Να δείξετε ότι $\partial r / \partial x_i = x_i / r$ για κάθε $i = 1, \dots, n$, $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$.

(2) Χρησιμοποιώντας το Ερ. 1, να υπολογίσετε τη βαθμίδα $\vec{\nabla} f$ της βαθμωτής συνάρτησης

$$f(x_1, \dots, x_n) = \phi(r(x_1, \dots, x_n)).$$

(3) Χρησιμοποιώντας το Ερ. 1, να υπολογίσετε την απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ του διανυσματικού πεδίου

$$\vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \phi(r(x_1, \dots, x_n)) \cdot (x_1, \dots, x_n).$$

(4) Χρησιμοποιώντας τα Ερ. 2 και 3, να υπολογίσετε τη Λαπλασιανή $\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$ της f .

(5) Να υπολογίσετε τη Λαπλασιανή της συνάρτησης $U(x_1, \dots, x_n) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-p/2}$ για $p > 0$ και $(x_1, \dots, x_n) \neq (0, \dots, 0)$. Για ποιές τιμές του p μηδενίζεται η ΔU ?

Σημ. Μπορείτε να λύσετε το θέμα για την ειδική περίπτωση $n = 3$ με συντελεστή βαθμολογίας 60%.

Θέμα 3 [10 μονάδες]. Βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x, y) = e^{x^2+2y^2} - e^{-2x^2-y^2}$, $x, y \in \mathbb{R}$, και υπολογίστε με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων την τιμή $f(0.1, -0.2)$.

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ

Θέμα 4 [20 μονάδες]. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy \, dy \, dx.$$

(1) Να σχεδιαστεί το χωρίο ολοκλήρωσης και να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος.

(2) Να υπολογιστεί εκ νέου το ολοκλήρωμα με την αντίστροφη φορά ολοκλήρωσης.

Θέμα 5 [30 μονάδες]. Έστω διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (2x/3 + 5y, 5x + 2y/3, -z/3)$ και χωρίο W που περικλείεται από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και το επίπεδο $z = 2$.

(1) Υπολογίστε την απόκλιση $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$ και τον στροβιλισμό $\vec{\nabla} \times \vec{F}$. Σε μία πρόταση, τι συμπεραίνετε για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{A \rightarrow B} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ μιας διαδρομής με άκρα A, B ;

(2) Σχεδιάστε το χωρίο W , βρείτε μια παραμετροποίηση για καθεμία από τις δύο επιφάνειες του συνόρου του ∂W , και υπολογίστε το στοιχείο προσανατολισμένης επιφάνειας $d\vec{S}$ πάνω σε αυτά.

(3) Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_{\partial W} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ με τη βοήθεια του υποερωτήματος 2.

(4) Υπολογίστε το βαθμωτό ολοκλήρωμα $\iiint_W (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) \, dx \, dy \, dz$ με τη βοήθεια του υποερωτήματος 1.

(5) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των τελευταίων δύο υποερωτημάτων. Ποιο θεώρημα υπαγορεύει τη σχέση τους;

Καλή επιτυχία!