

ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ—02.06.2025

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ: Γ. ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ, Π. ΜΕΡΤΙΚΟΠΟΥΛΟΣ & Γ. ΠΑΠΑΘΑΝΑΣΙΟΥ

Διάρκεια: 3 ώρες.

Οδηγίες: Γράψτε τα θέματα κάθε ενότητας σε διαφορετική κόλλα. Λύστε όλα τα θέματα. Η μέγιστη βαθμολογία είναι 100 μονάδες. Δεν επιτρέπεται η χρήση αριθμομηχανής. Χρησιμοποιήστε πρόχειρο.

Τυπολόγιο: Δίνεται ότι $e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$ και $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - x^4/4 + \dots$

ΕΝΟΤΗΤΑ Ι—ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Θέμα 1 [30 μονάδες]. Για κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις δύο μεταβλητών, να υπολογίσετε α) το όριο $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$, αν υπάρχει (αλλιώς, να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει και να διευκρινίσετε αν είναι $\pm\infty$ ή όχι)· β) τη βαθμίδα $\vec{\nabla}f$ της συνάρτησης· και γ) τη Λαπλασιανή $\Delta f \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}f$.

(1) $f(x,y) = \log \sqrt{x^2 + y^2}$ με $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

(2) $f(x,y) = x/(x^2 + y^2)$ με $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Θέμα 2 [20 μονάδες]. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = xe^{-x^2-2y^2}$, $x,y \in \mathbb{R}$.

(1) Υπολογίστε το πολυώνυμο Taylor τρίτης τάξης της f ως προς το σημείο $(0,0)$.

(2) Υπολογίστε σε ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων την τιμή $f(0.1, 0.1)$.

(3) Να υπολογίσετε και να χαρακτηρίσετε τα κρίσιμα σημεία της f (δηλ. να αποφανθείτε αν πρόκειται για τοπικά ελάχιστα, μέγιστα ή σαγματικά σημεία).

ΕΝΟΤΗΤΑ ΙΙ—ΟΛΟΚΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Θέμα 3 [20 μονάδες]. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2 dy dx.$$

(1) Να σχεδιαστεί το χωρίο ολοκλήρωσης και να υπολογιστεί η τιμή του ολοκληρώματος.

(2) Να υπολογιστεί εκ νέου το ολοκλήρωμα με την αντίστροφη φορά ολοκλήρωσης.

Θέμα 4 [30 μονάδες].

(1) Δίνεται διανυσματικό πεδίο $\vec{F} = (y+z, -x, zx)$. Να βρεθεί ο στροβιλισμός του, $\nabla \times \vec{F}$.

(2) Δίνεται η επιφάνεια παραβολοειδούς,

$$S = \{(x,y,z) : z + x^2 + y^2 - 4 = 0 \text{ και } z \geq 0\}$$

Να σχεδιαστεί η επιφάνεια, να βρεθεί μια παραμετροποίησή της και να υπολογιστεί το στοιχείο προσανατολισμένης επιφάνειας $d\vec{S}$ πάνω σε αυτή.

(3) Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ για το $\vec{F}$ του υποερωτήματος 1, επί της καμπύλης ∂S του συνόρου της επιφάνειας S από το υποερώτημα 2.

(4) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S}$ για τα $\vec{F}$, S των υποερωτημάτων 1,2, αντίστοιχα.

(5) Να συγκριθούν τα αποτελέσματα των τελευταίων δύο υποερωτημάτων. Ποιο θεώρημα υπαγορεύει τη σχέση τους;

Καλή επιτυχία!