Επικαμπύλια Ολοκληρώματα.

Επιφανειακά Ολοκληρώματα.

Μέτρο ολοκλήρωσης (σε καμπύλη).

- Σε ευθεία (π.χ. άξονας x)

$$dx \quad : \quad \int_\alpha^\beta dx = \beta - \alpha$$

Ολοκληρώνοντας την σταθερή συνάρτηση $f(x) = 1$ παίρνουμε το μήκος (μέτρο) του διαστήματος (συνόλου).

Ολοκλήρωμα: $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx$

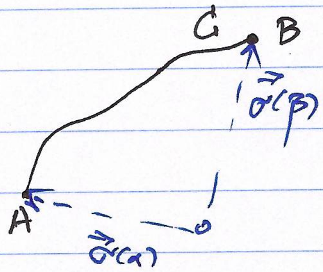
ή σε γλώσσα "διανυσματικών πεδίων"

μπορούμε να έχουμε και $\vec{dx} = \hat{i}\, dx$

και για $\vec{f}(x) = f(x)\hat{i}$ ορίζουμε:

$$\int_\alpha^\beta \vec{f}(x) \cdot \vec{dx} = \int_\alpha^\beta f(x)\hat{i} \cdot \hat{i}\, dx = \int_\alpha^\beta f(x)\, dx.$$

• Σε τυχαία καμπύλη με παραμετρική έκφραση $\vec{\sigma}(t)$:



$$dl = \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$$

με:

$$l_C = \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$$

Επίσης μπορούμε να έχουμε:

$$\vec{dl} = \hat{t}\, dl = \frac{\vec{\sigma}'(t)}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt = \vec{\sigma}'(t)\, dt.$$

Επικαμπύλια ολοκληρώματα:

• $\int_C f(\vec{r})\, dl$ f : βαθμωτή συνάρτηση

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(\vec{\sigma}(t))\, \|\vec{\sigma}'(t)\|\, dt$$

• $\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{dl}$ $\vec{F}$: διανυσματικό πεδίο

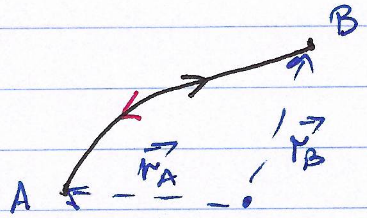
$$= \int_{\alpha}^{\beta} \vec{F}(\vec{\sigma}(t)) \cdot \vec{\sigma}'(t)\, dt$$

$\int f(\vec{r})\, dl$: ανεξάρτητο της παραμετροποίησης,

$\int_{C[A\to B]} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{l}$: ανεξάρτητο της παραμετροποίησης,

αλλά: $$\int_{C[A\to B]} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{l} = -\int_{C[B\to A]} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{l}$$

δηλαδή αυτό το ολοκλήρωμα εξαρτάται (ως προς το πρόσημο) από την φορά κατά την οποία διαγράφεται η καμπύλη.



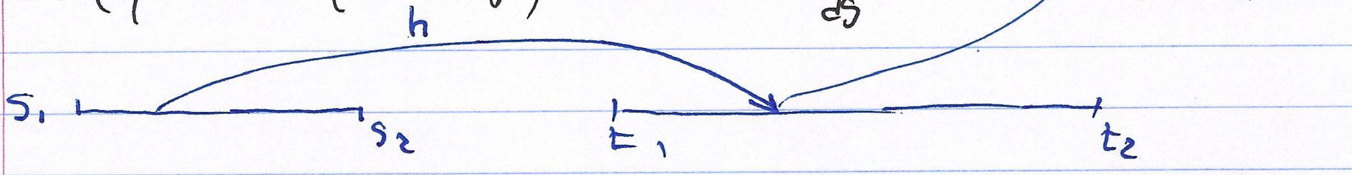
Εάν $\vec{\sigma}(t)$ παραμετροποίηση με $\vec{\sigma}(t_1) = \vec{r}_A$, $\vec{\sigma}(t_2) = \vec{r}_B$

τότε κάθε άλλη παραμετροποίηση:

$$\vec{\rho}(s) = \vec{\sigma}(t(s))$$

διατηρεί τον προσανατολισμό εάν $\frac{dt}{ds} > 0$ $\quad (h(s_1)=t_1,\ h(s_2)=t_2)$

αναστρέφει τον προσανατολισμό εάν $\frac{dt}{ds} < 0$. $\quad (h(s_1)=t_2,\ h(s_2)=t_1)$

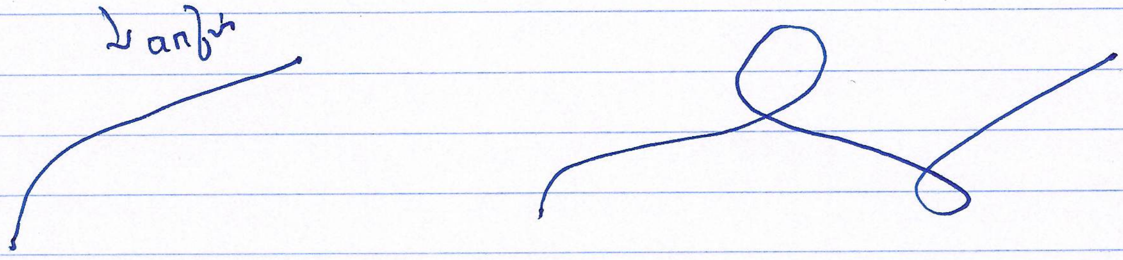


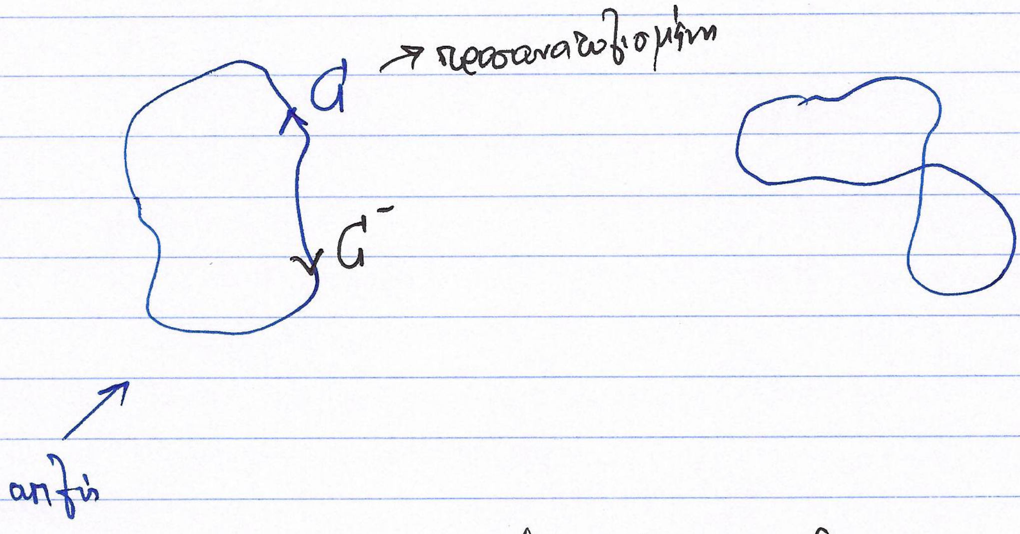
Εάν $t \to \vec{\sigma}(t)$ είναι ένα προς ένα

$\Rightarrow$ απλή καμπύλη (με προσανατολισμό)

Εάν $\vec{\sigma}(t_1) = \vec{\sigma}(t_2) \Rightarrow$ κλειστή καμπύλη

απλή εάν η απεικόνιση είναι ένα προς ένα και επί της οποίας έχουμε δύο δυνατές κατευθύνσεις να κινηθούμε.





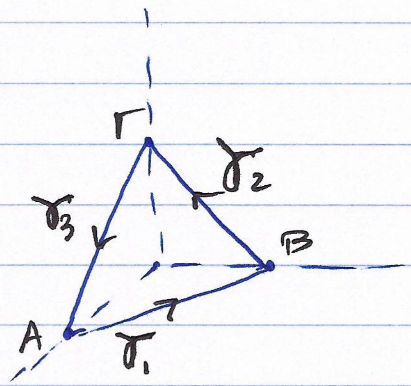
Συμβολίζουμε: $\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \int_C F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το $\int_C F_x dx + F_y dy + F_z dz$

όπου $\vec{F} = (xy,\ yz,\ zx)$ και C το τρίγωνο

με κορυφές τα σημεία $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ το οποίο

διαγράφεται δεξιόστροφα.



$\gamma_1 : \ (1-t,\ t,\ 0) = \vec{\sigma}_1(t) \qquad 0 \le t \le 1$

$\gamma_2 : \ (0,\ 1-t,\ t) = \vec{\sigma}_2(t) \qquad 0 \le t \le 1$

$\gamma_3 : \ (t,\ 0,\ 1-t) = \vec{\sigma}_3(t) \qquad 0 \le t \le 1$

$$\int_C \vec{F} \cdot \vec{dl} = \underbrace{\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{dl}}_{I_1} + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{dl} + \int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{dl}$$

$$I_1 = \int_0^1 \big((1-t)t,\ 0,\ 0\big) \cdot (-1,\ 1,\ 0)\, dt =$$

$$= -\int_0^1 t(1-t)\, dt = -\left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

και $\quad I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{1}{2}$.

• εάν $\vec{F} = \vec{\nabla} f \;\Rightarrow\; \displaystyle\int_{C[A\to B]} \vec{F}\cdot d\vec{l} = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A)$.

έστω $\vec{\sigma}(t)$: με $\vec{\sigma}(t_1) = \vec{r}_A$ και $\vec{\sigma}(t_2) = \vec{r}_B$.

$$\int_{C[A\to B]} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ F_x(\vec{\sigma}(t))\frac{dx}{dt} + F_y(\vec{\sigma}(t))\frac{dy}{dt} + F_z(\vec{\sigma}(t))\frac{dz}{dt} \right\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial f(\vec{\sigma}(t))}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f(\vec{\sigma}(t))}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f(\vec{\sigma}(t))}{\partial z}\frac{dz}{dt} \right\} dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} g(t)\, dt = g(t_2) - g(t_1)$$

με $g(t) = f(\vec{\sigma}(t))$ και $g(t_2) = f(\vec{\sigma}(t_2)) = f(\vec{r}_B)$,

$g(t_1) = f(\vec{\sigma}(t_1)) = f(\vec{r}_A)$,

οπότε:

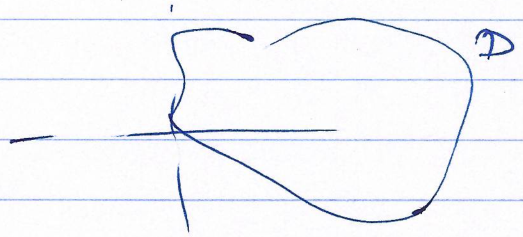
$$\int_{C[A\to B]} \vec{F}\cdot d\vec{l} = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A).$$

• εάν C κλειστή καμπύλη : $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = 0$

εάν $\vec{F} = \vec{\nabla} f$

Μέτρο ολοκλήρωσης (σε επιφάνεια).

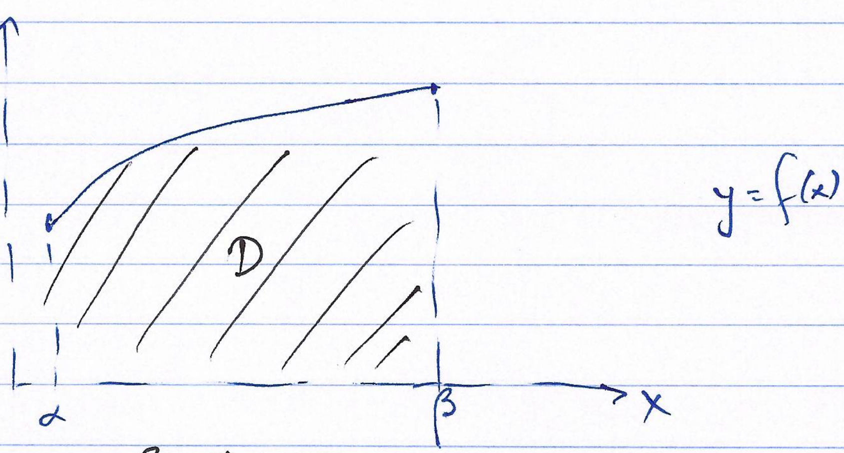
• Στο επίπεδο



dxdy : $\int_D dxdy = A(D)$

→ εμβαδόν του χωρίου D.

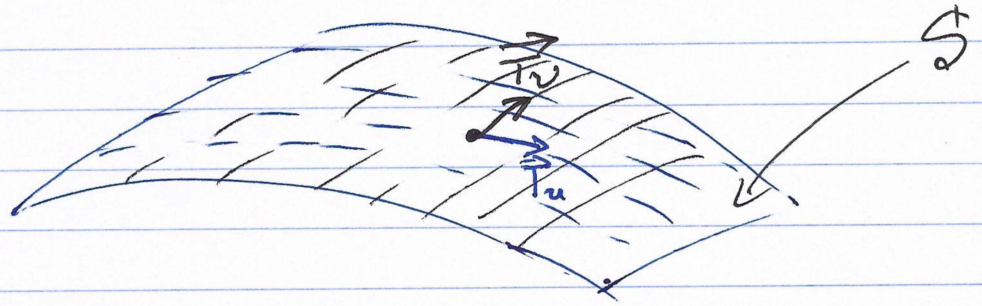
π.χ.



$$A(D)=\int_D dxdy = \int_\alpha^\beta \left\{\int_0^{f(x)} dy\right\} dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

Ολοκλήρωμα : $\int_D f(x,y)\,dxdy$.

• Σε τυχαία επιφάνεια:



S : $\vec{\Phi}(u,v)$

↳ παραμετρική έκφραση

$\vec{T}_u\, du = \vec{dl}_u$: στοιχειώδες μήκος σε γραμμές σταθερού v

"

$(\|\vec{T}_u\|\, du)$

$\vec{T}_v\, dv = \vec{dl}_v$

$$dS = \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\, dv$$

↳ στοιχειώδης επιφάνεια επί της S.

$$A(S) = \int_D \|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\, du\, dv$$

↳ πεδίο ορισμού των (u,v)

1. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της (τοροειδούς) επιφάνειας:

$x = (a + b\sin\theta)\cos\varphi$

$y = (a + b\sin\theta)\sin\varphi$

$z = b\cos\theta \qquad\qquad 0 \le \theta, \varphi \le 2\pi.$

$$\vec{T}_\theta = (b\cos\theta\cos\varphi,\ b\cos\theta\sin\varphi,\ -b\sin\theta)$$

$$\vec{T}_\varphi = (-(a+b\sin\theta)\sin\varphi,\ (a+b\sin\theta)\cos\varphi,\ 0)$$

$$\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b\cos\theta\cos\varphi & b\cos\theta\sin\varphi & -b\sin\theta \\ -(a+b\sin\theta)\sin\varphi & (a+b\sin\theta)\cos\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}\ b\sin\theta(a+b\sin\theta)\cos\varphi + \hat{j}\ b\sin\theta(a+b\sin\theta)\sin\varphi$$

$$+ \hat{k}\left[(a+b\sin\theta)\, b\cos^2\varphi\cos\theta + b(a+b\sin\theta)\sin^2\varphi\cos\theta\right]$$

$$\|\vec{T}_\theta \times \vec{T}_\varphi\|^2 = b^2(a+b\sin\theta)^2 \qquad (= \|\vec{T}_\theta\|^2\,\|\vec{T}_\varphi\|^2)$$

Επομένως:

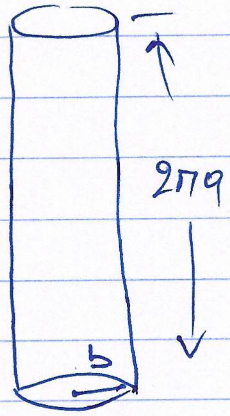
$$dS = b(a+b\sin\theta)\,d\theta\,d\varphi$$

και $$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} b(a+b\sin\theta)\,d\theta\,d\varphi = 4\pi^2 ab$$

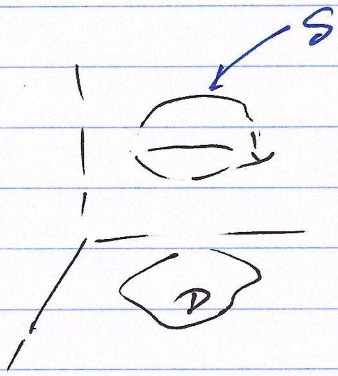
$$= \underbrace{(2\pi b)(2\pi a)}$$

Εμβαδόν κυλίνδρου

(παράπλευρης επιφάνειας)



2. Να ευρεθεί έκφραση για το Εμβαδόν επιφάνειας η οποία είναι γράφημα συνάρτησης δύο μεταβλητών.



$$\vec{\Phi}(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

$$\vec{T}_x = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$\vec{T}_y = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\vec{T}_x \times \vec{T}_y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = \hat{i}\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\right) - \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{T}_x \times \vec{T}_y\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

και

$$A(S) = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy\,.$$

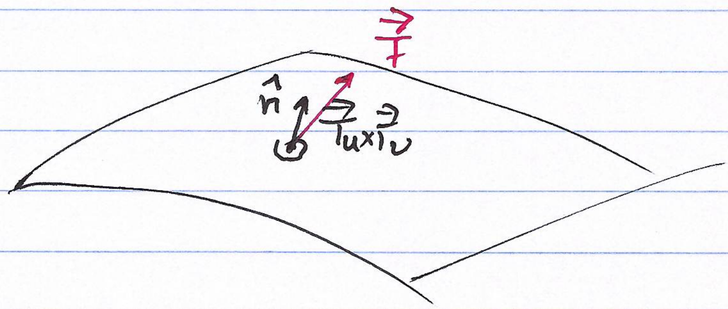
Επιφανειακά ολοκληρώματα.

- Για βαθμωτή συνάρτηση $f(\vec{r})$:

$$\int_S f\,dS = \int_D f(\vec{\Phi}(u,v))\,\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\,du\,dv$$

Αναλλοίωτο σε αναπαραμετροποιήσεις της επιφάνειας.

- Για διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(\vec{r})$:



Ροή διανυσματικού πεδίου από επιφάνεια :

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,dS = \qquad (\hat{n}\,dS = d\vec{S})$$

$$= \int_D \vec{F}(\vec{\Phi}(u,v))\cdot\frac{\vec{T}_u \times \vec{T}_v}{\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|}\,dS =$$

$\|\vec{T}_u \times \vec{T}_v\|\,du\,dv$

$$\int_D \vec{F}(\vec{\Phi}(u,v))\cdot(\vec{T}_u \times \vec{T}_v)\,du\,dv$$