ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ [10ΥΚΟ12]
ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ 25.06.2024

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2023–2024

Διάρκεια: 3 ώρες
Οδηγίες: Λύστε 4 από τα 5 θέματα. **Σημειώστε στην πρώτη κόλλα ποιά θέματα λύσατε.**

Θέμα 1 [25 μονάδες.] Έστω η συνάρτηση $f(x,\ y) = (x - y^2)(x - 2y^2)$ με $x,\ y \in \mathbb{R}$.

(1) Υπολογίστε την κλίση ∇f της f στο σημείο $(2,1)$ και την εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο γράφημα της f στο σημείο $(2,1,0)$.

(2) Δείξτε ότι το μόνο κρίσιμο σημείο της f είναι το $(0,\ 0)$.

(3) Έστω η συνάρτηση $\phi(t) = f(t,\ t)$ με $t \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι το $t = 0$ είναι τοπικό ελάχιστο της ϕ.

(4) Έστω η συνάρτηση $\psi(t) = f(3t^2/2,\ t)$. Να δείξετε ότι το $t = 0$ είναι ολικό μέγιστο της ψ.

(5) Τί συμπεραίνετε για το κρίσιμο σημείο που υπολογίσατε στο (2)? ❦

Θέμα 2 [25 μονάδες.] Έστω μία ποσότητα A που εξαρτάται από τις μεταβλητές x, y, z με ομαλό τρόπο, δηλ. η συνάρτηση $A(x, y, z)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Αν οι x, y, z μετρώνται πειραματικά με σφάλμα Δx, Δy, Δz, το σφάλμα που διαδίδεται στον υπολογισμό της A δίνεται από τη γενική σχέση

$$\Delta A = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\Delta z\right)^2}\,.$$

Το θέμα αυτό αφορά εφαρμογές της παραπάνω σχέσης σε ένα πρόβλημα φυσικής.

(1) Η καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων μπορεί να γραφεί ως $PV = NkT$, όπου k η σταθερά Boltzmann, P η πίεση του αερίου, V ο όγκος του, T η θερμοκρασία του, και N ο αριθμός σωματιδίων. Αν ένας πειραματιστής διαθέτει μετρήσεις των P, T και V με σφάλματα ΔP, ΔT και ΔV αντιστοίχως, να δείξετε με βάση την παραπάνω σχέση ότι

$$\frac{\Delta N}{N} = \sqrt{\left(\frac{\Delta P}{P}\right)^2 + \left(\frac{\Delta V}{V}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2}\,.$$

(2) Να υπολογίσετε το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της συνάρτησης $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ως προς ένα τυχαίο σημείο (x_0, y_0, z_0) με $x_0, y_0, z_0 > 0$.

(3) Αν τα σχετικά σφάλματα στη μέτρηση των P, V, T είναι $\Delta P/P = 1.02\%$, $\Delta V/V = 1.99\%$ και $\Delta T/T = 2.03\%$ αντιστοίχως, υπολογίστε προσεγγιστικά το σχετικό σφάλμα $\Delta N/N$ στον υπολογισμό του N. [Χρησιμοποιήστε τα παραπάνω ερωτήματα. Απάντηση από αριθμομηχανή δε γίνεται δεκτή.] ❦

Θέμα 3 [25 μονάδες.] Αυτό το θέμα αφορά όρια και ολοκλήρωση.

(1) Εξετάστε αν υπάρχει – και, αν υπάρχει, υπολογίστε – το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos x - \cos y}{\sin^2 x + \sin^2 y}\,.$$

(2) Έστω D το χωρίο στο επίπεδο xy που περικλείεται από τον άξονα των y, την ευθεία $y = 2$, και την καμπύλη $y = \sqrt{x}$ (κάντε το αντίστοιχο σχήμα). Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_D y[1 - \cos(\pi x/4)]\, dA\,.$$

(3) Έστω χωρίο $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα

$$\iint_B \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dA\,.$$

❦

Θέμα 4 [25 μονάδες.] Αυτό το θέμα αφορά καμπύλες στο επίπεδο και επικαμπύλια ολοκληρώματα.

(1) Δίδεται η επίπεδη παραμετρική καμπύλη $\vec{\gamma}(s) = (x(s),\ y(s))$, οπου $0 < s < L$ η παράμετρος μήκους τόξου. Να ευρεθούν, το ομοκινούμενο σύστημα, $\hat{T},\ \hat{N},$ και οι σχέσεις Frenet.

(2) Εάν η καμπύλη έχει σταθερή καμπυλότητα $\kappa \neq 0$ να ευρεθούν οι παράγωγοι

$$\frac{d^n \hat{T}}{ds^n}$$

για n άρτιο και για n περιττό.

(3) Να υπολογισθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_{\partial D}(x^2 + y)\,dx$ όπου ∂D το σύνορο της περιοχής $D = \left\{(x, y) : 0 < y < 4 - x^2\right\}$, με απευθείας υπολογισμό και με χρήση του θεωρήματος Green. ❦

Θέμα 5 [25 μονάδες.] Αυτό το θέμα αφορά τα θεωρήματα Stokes και Gauss.

(1) Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2 + a^2},\ \frac{x}{x^2 + y^2 + a^2},\ z\right).$$

Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Stokes για το ημισφαίριο $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ z \geq 0\}$ και τον δίσκο $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = b^2,\ z = 0\}$.

(2) Δίδεται η συνάρτηση $f(x,\ y,\ z) = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$\oiint_S f(x, y, z)ds$$

στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a, $S = \{(x, y, z,) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, εφαρμόζοντας το θεώρημα Gauss. ❦

Καλή επιτυχία!