

Διαφοματικές Συναρτήσεις μιας μεταβλητής.

Καμύφες στον \mathbb{R}^n .

A. Καμύφες στο επίπεδο.

- Γεωμετρικός ορισμός.

Σημεία του επιπέδου τα οποία συνδέονται με κάποια ιδιότητα.

- Αναλυτική περιγραφή.

(i). $y = f(x)$: Γραφικό συναρτητικό μιας μεταβλητής.

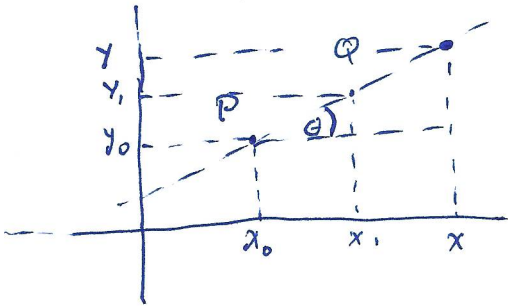
(ii). $F(x, y) = 0$: Παιξωμένη μορφή.

(iii). $\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t))$: Παραμετρική περιγραφή (παραμετρική καμύφη).
 $t \in I$ (διάστημα του \mathbb{R})
 Διαφοματική συνάρτηση:
 $\vec{\sigma}: I \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Παραδείγματα.

1. Ευθεία.

"Ευθεία γραμμών" σουv ..."



$$\tan \phi = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = c \quad \rightarrow \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = c \Rightarrow \begin{cases} y = y_0 + c(x - x_0) \rightarrow \text{γραμμή} \\ (y - y_0) - c(x - x_0) = 0 \rightarrow \text{πεντ. μορφή} \end{cases}$$

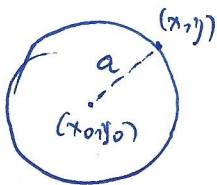
$$* (y = y_1 + c(x - x_1))$$

$$x - x_0 = \alpha t \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 + \alpha t \\ y(t) = y_0 + \beta t \end{cases} \quad (\beta = \alpha c) \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}} \right\} \text{παραμετρική έκφραση}$$

$$\vec{\sigma}(t) = \vec{r}_0 + \vec{a}t, \quad \vec{r}_0 = (x_0, y_0), \quad \vec{a} = (\alpha, \beta).$$

2. Κύκλος.

"Σημεία που ισαρίζουν ..."



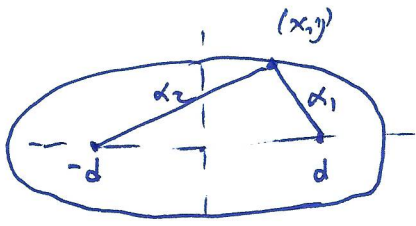
$$\underbrace{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2}_{\text{πεντ. μορφή}} \quad \rightarrow \quad \underbrace{y = y_0 \pm \sqrt{a^2 - (x - x_0)^2}}_{\text{δεν είναι γραμμή}}$$

$$\left. \begin{matrix} \frac{x - x_0}{a} = \cos t \\ \frac{y - y_0}{a} = \sin t \end{matrix} \right\} \rightarrow \vec{\sigma}(t) = \vec{r}_0 + a(\cos t, \sin t)$$

3. Έπιπέδων.

(3)

"Τα σημεία των οποίων το άθροισμα των..."



$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} + \sqrt{(x+d)^2 + y^2} = 2a$$
$$r_1 + r_2 = 2a$$

$$(x-d)^2 + y^2 = 4a^2 + (x+d)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$4a^2 + 4xd = 4a\sqrt{(x+d)^2 + y^2} \Rightarrow a + \frac{xd}{a} = \sqrt{x^2 + d^2 + 2xd + y^2} \Rightarrow$$

$$a^2 + \frac{x^2 d^2}{a^2} + 2xd = x^2 + d^2 + y^2 + 2xd \Rightarrow$$

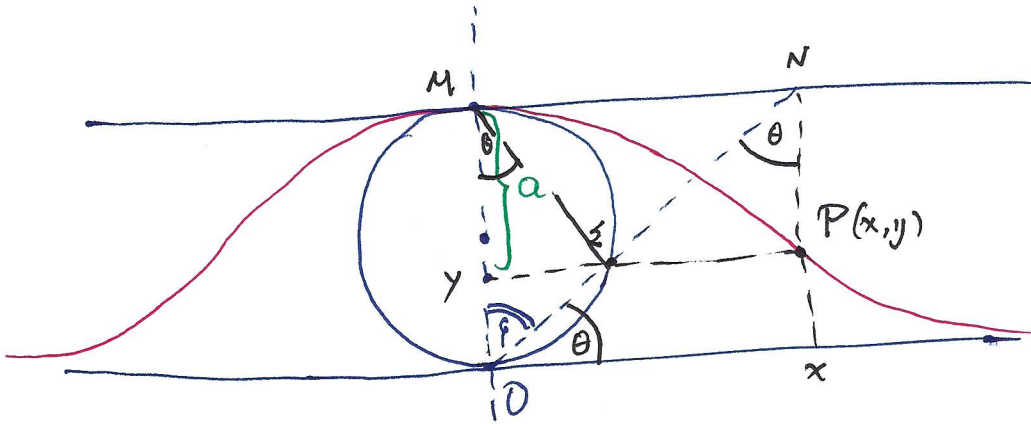
$$x^2 \left(1 - \frac{d^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - d^2 \quad (a > d) \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b^2 = a^2 - d^2 \quad (\text{ixi περίπτωση})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{a} &= \cos t \\ \frac{y}{a} &= \sin t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$$

4. Καρδιά ως Αγνήσι.

(4)



$\theta \rightarrow 0 : \begin{matrix} x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}$

$\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} : \begin{matrix} x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 2a \end{matrix}$

$\tan \theta = \frac{2a}{x} \Rightarrow x = \frac{2a}{\tan \theta}$

$\theta \rightarrow \pi : \begin{matrix} x \rightarrow -\infty \\ y \rightarrow 0 \end{matrix}$

$\left. \begin{matrix} y = (Oz) \sin \theta \\ (Oz) = 2a \sin \theta \end{matrix} \right\} \Rightarrow y = 2a \sin^2 \theta$

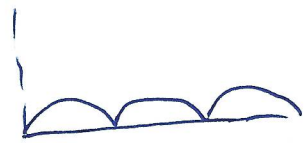
$\vec{\sigma}(\theta) = 2a \left(\frac{1}{\tan \theta}, \sin^2 \theta \right)$

$x^2 = 4a^2 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \Rightarrow x^2 + 4a^2 = \frac{4a^2}{\sin^2 \theta} = \frac{4a^2}{\frac{y}{2a}} \Rightarrow$

$y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$

5. Κυκλοειδής.

$\vec{\sigma}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t).$

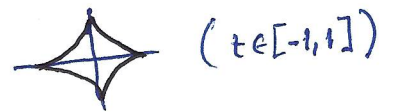


6. Γεωμετρία.

$\vec{\sigma}(t) = (t, f(t)).$

7. Υποκυκλοειδής.

$\vec{\sigma}(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$



8. Παραβολή.

$\vec{\sigma}(t) = (t, t^2)$

B. Kurven von \mathbb{R}^n .

$$\vec{r} = (x_1, \dots, x_n)$$

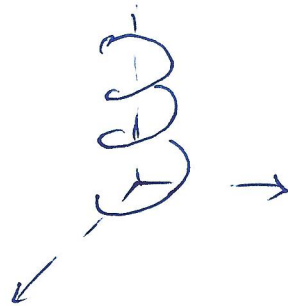
(i). $x_i = f_i(x_j), \quad i \neq j$

(ii). $F_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = F_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = 0$

(iii). $\vec{\sigma}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad \vec{\sigma}: \underset{\mathbb{R}}{I} \rightarrow \mathbb{R}^n.$

n.x. $\mathbb{R}^3.$

$$\vec{\sigma}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt) \quad : \quad \text{Ezika.}$$



Γ. Μερίδα καμπύλων.

Η παραμετρική διατύπωση των καμπύλων επιτρέπει την αναλυτική μερίδα τους με χρήση των αντίστοιχων συναρτήσεων μιας μεταβλητής.

Ο λόγος είναι ο ακόλουθος:

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{matrix} f(x) \rightarrow c \\ x \rightarrow x_0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} f(x) - c \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} | \dots | \rightarrow 0 \\ x \rightarrow x_0 \end{matrix} \right.$$

(μόνο το 0 έχει απόλυτη τιμή 0).

$$\vec{\sigma} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left. \begin{matrix} \vec{\sigma}(t) \rightarrow \vec{c} \\ t \rightarrow t_0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \vec{\sigma}(t) - \vec{c} \rightarrow 0 \\ t \rightarrow t_0 \end{matrix} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \|\vec{\sigma}(t) - \vec{c}\| \rightarrow 0 \\ t \rightarrow t_0 \end{matrix} \right.$$

(μόνο το 0 έχει μέτρο 0).

$$\text{Έστω } \vec{\sigma}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

$$\vec{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$$

$$\|\vec{\sigma}(t) - \vec{c}\| = \left[(x_1(t) - \gamma_1)^2 + \dots + (x_n(t) - \gamma_n)^2 \right]^{1/2} \rightarrow 0 \Leftrightarrow$$

$$x_i(t) - \gamma_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad \left(\begin{matrix} x_i(t) \text{ πραγμ. συν.} \\ \text{μίας πραγμ. μετ.} \end{matrix} \right)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \vec{\sigma}(t) = \vec{c} \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} x_i(t) = \gamma_i$$

Επιπλέον μπορούμε να έχουμε καμπύλες με ως (n,x) αξίες
ιδιότητες:

$$t \mapsto (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

- (a). Συνεχώς καμπύλη: $x_i(t)$ συνεχώς συναρτήσεις.
 (b). Διαφορίσιμη καμπύλη: $x_i(t)$ διαφορίσιμες // *
 (c). C^1 // : $x_i(t)$ συνεχώς διαφορίσιμες.
 (d). Λογία καμπύλη: C^1 και $\frac{d\vec{\sigma}}{dt} \neq 0$.

*

$\vec{\sigma}(t)$ διαφορίσιμη

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right) **$$

L: "ταχύτητα καμπύλης"

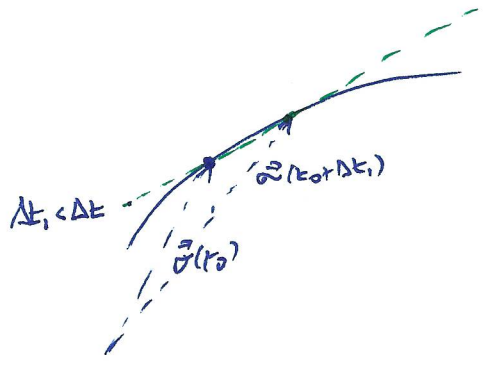
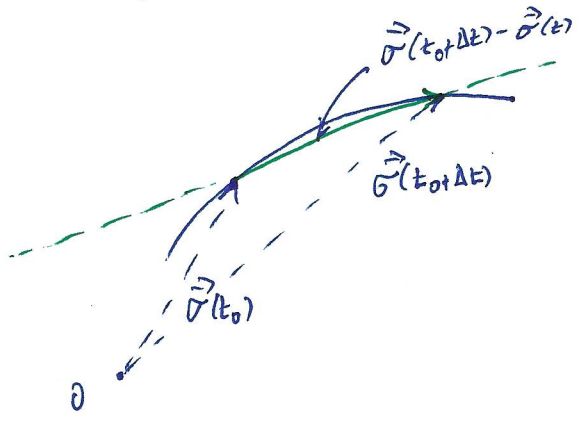
**

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\sigma}(t+\Delta t) - \vec{\sigma}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \dots, \frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t+\Delta t) - x_1(t)}{\Delta t}, \dots, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_n(t+\Delta t) - x_n(t)}{\Delta t} \right) \\ &= \left(\frac{dx_1(t)}{dt}, \dots, \frac{dx_n(t)}{dt} \right). \end{aligned}$$

"Επιτάχυνση" καμπύλης.

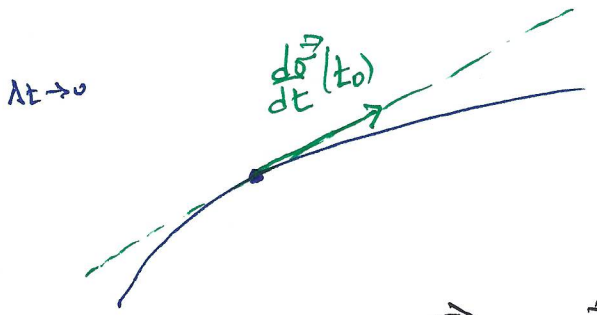
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{\sigma}(t)}{dt}$$

"Γεωμετρία μιας καμπύλης".



$\frac{1}{\Delta t} (\vec{\sigma}(t_0 + \Delta t) - \vec{\sigma}(t_0))$: διάνυσμα από το $\vec{\sigma}(t_0)$ στο $\vec{\sigma}(t_0 + \Delta t)$ $\frac{1}{\Delta t}$

$\vec{\sigma}(t_0) + \lambda [\vec{\sigma}(t_0 + \Delta t) - \vec{\sigma}(t_0)]$: ευθεία η οποία διέρχεται από τα δύο σημεία



$\frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$: διάνυσμα εφαπτόμενο στην καμπύλη στο σημείο $\vec{\sigma}(t_0)$.

$\vec{\gamma}(\lambda) = \vec{\sigma}(t_0) + \lambda \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$: ευθεία εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο $\vec{\sigma}(t_0)$.

"Γραμμική προσέγγιση" της καμπύλης.

Έστω $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο σημείο x_0 , με $\frac{df}{dx}(x_0) \neq 0$.

Έστω: $f(x_0+h) = f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0) + h \eta(h)$

$\Rightarrow \eta(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \} \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |h| < \delta \Rightarrow |\eta(h)| < \epsilon$

$\Rightarrow -\delta\epsilon < h\eta(h) < \delta\epsilon$

Ανβλδι η ποσότητα $h\eta$ μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρότερη (κατ' αυθαίρετη ϵ μιν) από την ποσότητα $h \frac{df}{dx}(x_0)$ \rightarrow σε "κατάλληλη" περιοχή του x_0 η συνάρτηση προσεγγίζεται με "σημ. ακρίβεια" $\delta\epsilon$ φορές γραμμικά:

$f(x_0+h) \approx f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0)$

Το ανάλογο συμβαίνει και με τις καμπύλες:

$\vec{\sigma}(t_0+h) = \vec{\sigma}(t_0) + h \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0) + h \vec{\eta}(h), \vec{\eta}(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$



$\vec{\sigma}(t_0+h) \approx \vec{\sigma}(t_0) + h \frac{d\vec{\sigma}}{dt}(t_0)$

Παραδείγματα.

$$(i). \quad \vec{\sigma}(t) = (t, f(t)) \Rightarrow \vec{\sigma}(t) : \text{Γεία}$$

(σφάλμα)

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \left(1, \frac{df}{dt}\right)$$

$\neq \vec{0}$

$$(ii). \quad \vec{\sigma}(t) = (a \cos t, a \sin t)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = (-a \sin t, a \cos t), \quad \frac{d^2\vec{\sigma}}{dt^2} = -(a \cos t, a \sin t)$$

$$(iii). \quad \text{Ελίκα.} \quad \vec{\sigma}(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$$\vec{v}(t) = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\vec{a}(t) = (-a \cos t, a \sin t, 0).$$

$$(iv). \quad \vec{\sigma}(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

$$\vec{v}(t) = (1 - \cos t, \sin t)$$

$$\vec{v}(t_n) = (0, 0), \quad t_n = 2n\pi$$

} κατά φαινόμενα Γεία
καμπύλη.

$$(v). \quad \frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)) = \frac{d\vec{a}(t)}{dt} \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \frac{d\vec{b}(t)}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{c}(t) \cdot (\vec{a}(t) \times \vec{b}(t))] = \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{c} \cdot \left(\frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b}\right) + \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}\right)$$

(vi). $\|\vec{\sigma}(t)\| = c \xrightarrow{\text{σταθερά}} \Rightarrow \vec{\sigma}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$

$$\|\vec{\sigma}(t)\|^2 = c^2 = \vec{\sigma}(t) \cdot \vec{\sigma}(t)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \cdot \vec{\sigma} + \vec{\sigma} \cdot \frac{d\vec{\sigma}}{dt} \Rightarrow 2 \vec{v} \cdot \vec{\sigma} = 0$$

(vii). $\vec{p}(t)$: τεράχια

$\vec{p}(t) = m \vec{v}(t)$: ορμή

$$\frac{d}{dt} (m \vec{v}(t)) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}(\vec{p}(t))$$

$\underbrace{\quad}_{\vec{a}}$

$$\frac{d}{dt} (\underbrace{\vec{p} \times \vec{p}}_{\text{σταθερά}}) = \underbrace{\vec{v} \times \vec{p}}_0 + \underbrace{\vec{p} \times \vec{F}}_{\text{σπιν}}$$