ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ κ' ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ: ΟΡΙΑ, ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ κ' ΣΥΝΕΧΕΙΑ

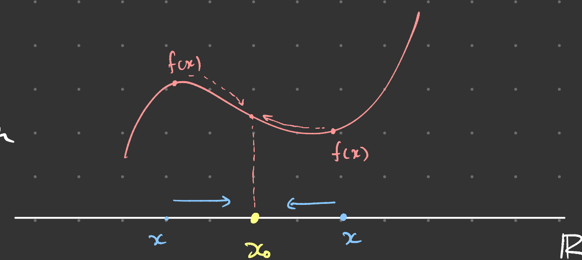
→ Θέλουμε να μελετήσουμε παραγώγους κ' ολοκληρώματα συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

⇒ χρειαζόμαστε βασικές έννοιες <u>ορίου</u> κ' <u>συνέχειας</u>

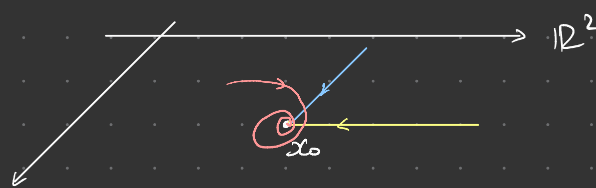
→ <u>Βασική διαφορά</u> με συναρτήσεις μιας μεταβλητής

↝ Όριο καθώς $x \to x_0 \in \mathbb{R}$

↳ Μία διάσταση ⇒ μπορούμε να πλησιάσουμε το x_0 είτε από δεξιά είτε από αριστερά ⇒ ο ορισμός του ορίου είναι διαισθητικά προφανής



→ Σε υψηλότερες διαστάσεις (συναρτήσεις <u>πολλών</u> μεταβλητών) η έννοια του "πλησιάσματος" είναι πιο λεπτή/περίπλοκη



→ Τί εννοούμε με την έννοια του "πλησιάσματος"?

↳ **Βασική έννοια:** αν δύο σημεία είναι αρκετά "κοντά" ⇒ μικρή απόσταση μεταξύ τους

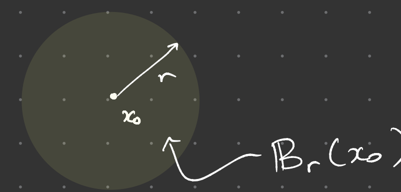
Μπάλα $\mathbb{B}_r(x_0) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r \}$

κέντρο

ακτίνα

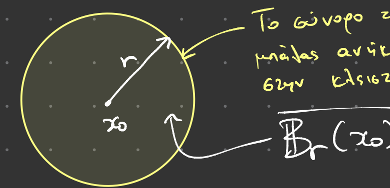
↳ Μπάλα με ακτίνα r κ' κέντρο x_0

$\|z\| = \sqrt{z_1^2 + \dots + z_n^2}$



→ Ο παραπάνω ορισμός είναι αυτός της ανοικτής μπάλας

↳ **Κλειστή μπάλα:** $\overline{\mathbb{B}_r(x_0)} = \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r \}$

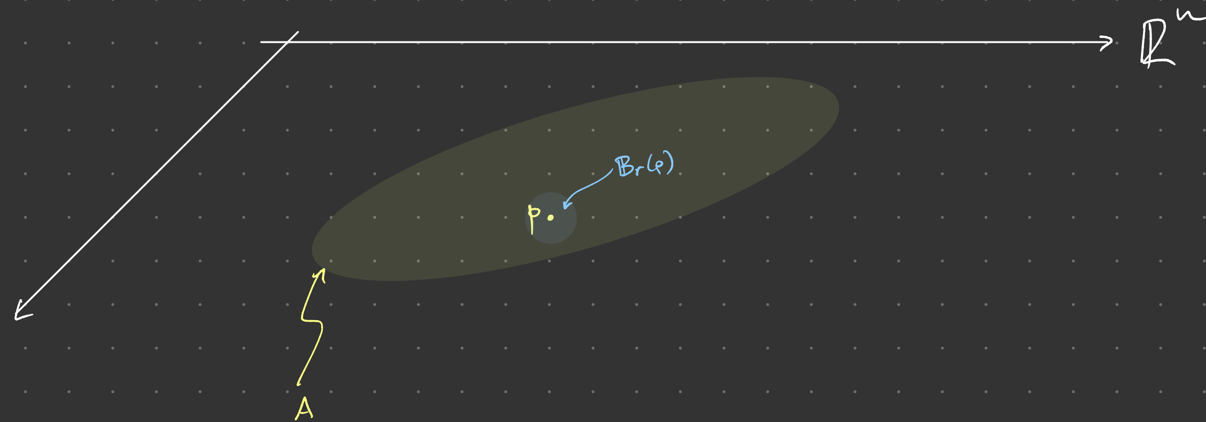


↳ **Βασική έννοια:** Ανοικτά σύνολα κ' περιοχές

Ορισμός: Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ καλείται **ανοικτό** όταν περιέχει μια (ανοικτή) μπάλα κάθε σημείου του, δηλαδή για κάθε σημείο $p \in A$ υπάρχει μια (ανοικτή) μπάλα $\mathbb{B}_r(p) \subseteq A$ για κάποιο $r > 0$

Ορισμός: Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ καλείται **ανοικτό** όταν περιέχει μια (ανοικτή) μπάλα κάθε σημείου του, δηλαδή για κάθε σημείο $p \in A$ υπάρχει μια (ανοικτή) μπάλα $B_r(p) \subseteq A$ για κάποιο $r > 0$.

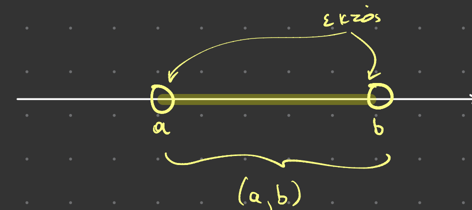
Διαισθητικά: Ένα σύνολο είναι ανοικτό όταν υπάρχει "αέρας" ανάμεσα σε κάθε σημείο του κ' στο συμπλήρωμά του (τα σημεία εκτός συνόλου)



Παραδείγματα:

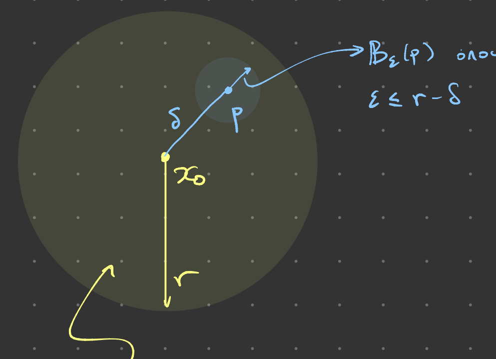
→ **Σε μια διάσταση:**

- Το διάστημα $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ είναι ανοικτό
- Τα διαστήματα $[a,b)$, $(a,b]$ κ' $[a,b]$ δεν είναι ανοικτά



→ **Σε n διαστάσεις:**

- Η ανοικτή μπάλα $\mathbb{B}_r(x_0)$ είναι ανοικτό σύνολο
- Η κλειστή μπάλα $\overline{\mathbb{B}_r(x_0)}$ δεν είναι ανοικτό σύνολο



$$\mathbb{B}_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$$

→ **Άσκηση:** ΝΔο το σύνολο $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1/x,\ x > 0\}$ είναι ανοικτό.

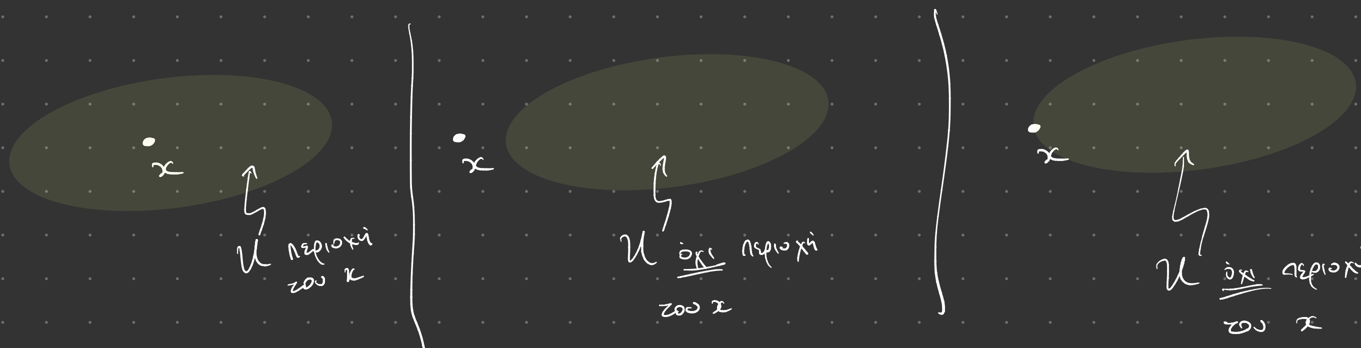
Ορισμός: Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ καλείται **κλειστό** όταν το συμπλήρωμα $A^c := \mathbb{R}^n \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^n : x \notin A\}$ του A είναι ανοικτό.

Παράδειγμα (στον $\mathbb{R}$): Το $[a,b]$ έχει ως συμπλήρωμα το σύνολο $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ το οποίο είναι ανοικτό. [Γιατί? Άσκ.]

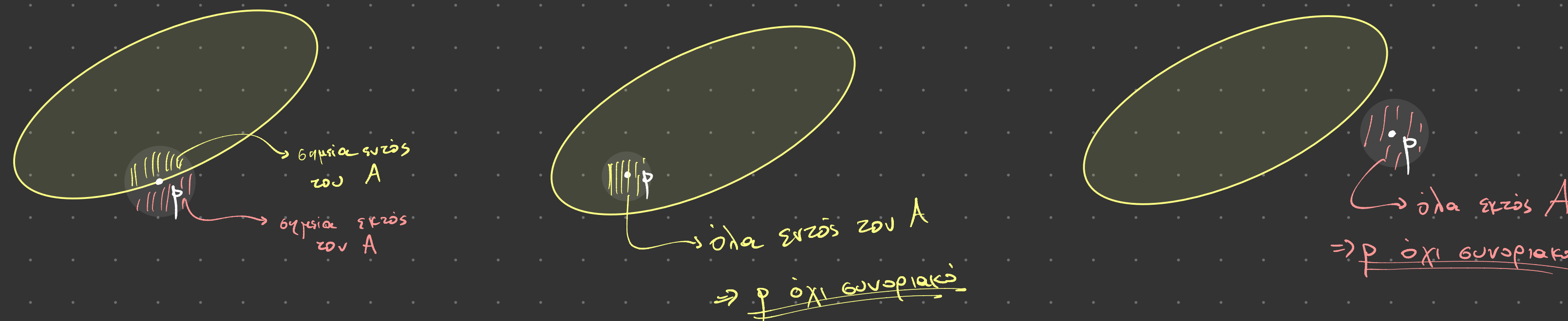
Άσκηση: ΝΔο η κλειστή μπάλα $\overline{B_r(x_0)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le r\}$ είναι κλειστό σύνολο.

Ορισμός: Θα λέμε ότι το σύνολο $U \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτή περιοχή του $x \in \mathbb{R}^n$ όταν εξ ορισμού το U είναι ανοικτό κ' περιέχει το x (δηλ. $x \in U$).

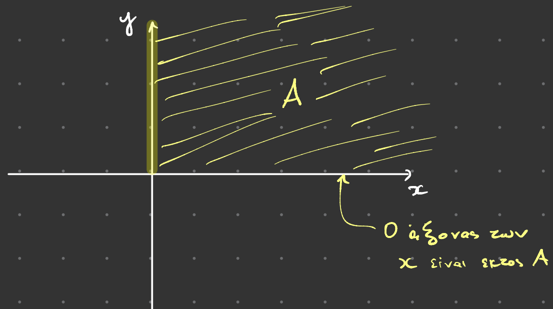
Εναλλακτικά: Περιοχή του x είναι κάθε ανοικτό σύνολο που το περιέχει.



Ορισμός: Έστω σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το σημείο $p \in \mathbb{R}^n$ είναι <u>συνοριακό σημείο</u> του A όταν κάθε περιοχή του p περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του A κ' τουλάχιστον ένα σημείο εκτός του A.



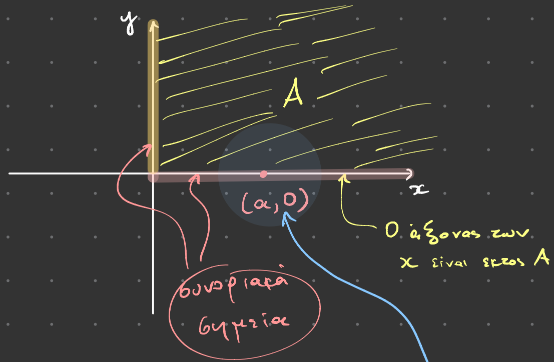
Παράδειγμα: Έστω το σύνολο $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y > 0\}$. Να βρεθούν τα συνοριακά του σημεία.



<u>Σημείωση:</u> το A δεν είναι <u>ούτε ανοικτό</u> <u>ούτε κλειστό</u>.

→ <u>Δεν είναι ανοικτό</u> επειδή αν πάρουμε ένα σημείο της μορφής $p = (0, y)$ με $y > 0$ δεν είναι δυνατό να βρούμε μία ανοικτή μπάλα που να περιέχεται στο A κ' να περιέχει το p.

→ <u>Δεν είναι κλειστό</u> επειδή αν πάρουμε ένα σημείο της μορφής $p = (x, 0)$ με $x \geq 0$ [άρα $p \in A^c$], δεν μπορούμε να βρούμε (ανοικτή) μπάλα που να περιέχεται στο A^c κ' να περιέχει το p.



Τα συνοριακά σημεία του A είναι όλα τα σημεία της μορφής $(x,0)$ ή $(0,y)$ με $x \geq 0$ κ' $y \geq 0$ αντιστοίχως

Θα το δείξουμε για σημεία της μορφής $(a,0)$ με $a \geq 0$ [Άσκ: $(0,y)$]

↳ Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε μπάλα με κέντρο το $(a,0)$ περιέχει τουλ. ένα σημείο του A κ' τουλάχιστον ένα σημείο του A^c

Έστω μια μπάλα $B_r(a,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-a)^2 + y^2 < r^2\}$

κέντρο στο $(a,0)$

→ <u>Εντός του A:</u> το σημείο $(a, r/2)$ ανήκει στο A κ' στη μπάλα ✓

→ <u>Εκτός του A:</u> το σημείο $(a,0)$ ανήκει στη μπάλα αλλά όχι στο A ✓

$(a, -r/2)$

$\Rightarrow$ Το σημείο $(a,0)$ με $a \geq 0$ είναι συνοριακό σημείο του A.

Ορισμός: Το σύνολο των συνοριακών σημείων του $A \subseteq \mathbb{R}^n$ καλείται **σύνορο** του A κ' συμβολίζεται ως $bd(A)$ ή ∂A

↳ boundary ↳ "del"

Γιατί όλα αυτά?!

↳ "Σύνορο", "περιοχές", "κοντά" ⟹ έννοια του όριου

Διαισθητικά: η $f(x)$ "πλησιάζει" κάποια οριακή τιμή $b \in \mathbb{R}^m$ καθώς το x "πλησιάζει" κάποιο x_0 όταν οι τιμές της f σε μια περιοχή του x_0 συνιστούν μια περιοχή του b.