Διανυσματικά Πεδία.

$$\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$A \ni \vec{r} \mapsto \vec{F}(\vec{r})$$

- $n=1$:

$$x \mapsto f(x)$$

$$x\hat{i} \mapsto f(x)\hat{i}$$

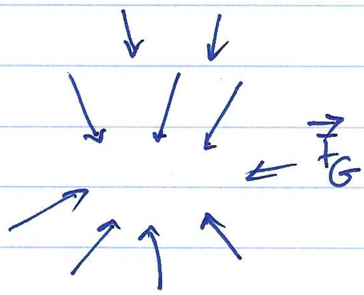
- $n=3$:

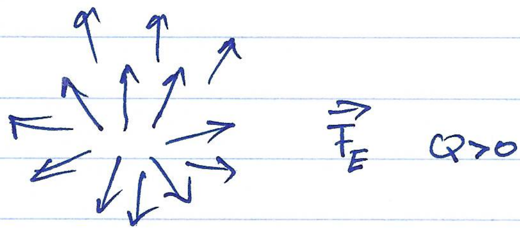
$$\left(\tfrac{1}{m}\right)\vec{F}_G = -\frac{M}{r^3}\vec{r}\, G_N = -\vec{\nabla}\Phi_G, \quad \Phi_G = -\frac{M}{r} G_N$$

$$\left(\tfrac{1}{q}\right)\vec{F}_E = \frac{Q}{r^3}\vec{r}\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = -\vec{\nabla}\Phi_E, \quad \Phi_E = \frac{Q}{r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

A. Εποπτεία:

(i).





(ii). Δυναμικές γραμμές (γραμμές ροής).

$\vec{\sigma}(t)$ καμπύλη τέτοια ώστε

$$\vec{F}(\vec{\sigma}(t)) = \vec{\sigma}'(t) \quad \left(= \frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)$$

Δυναμική γραμμή η οποία διέρχεται από ένα σημείο $\vec{r}_0$:

$$\vec{\sigma}'(t) = \vec{F}(\vec{\sigma}(t))$$

και $\vec{\sigma}(t_0) = \vec{r}_0$

(συνήθως παίρνουμε $t_0 = 0$).

Παραδείγματα.

1. $\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0 \right)$

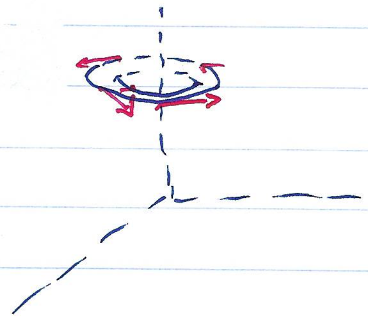
Να ευρεθούν οι δυναμικές γραμμές και να προσδιορισθεί η γραμμή η οποία διέρχεται από το σημείο $(1,2,1)$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -\frac{y(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \frac{x(t)}{x^2(t)+y^2(t)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x(t)\frac{dx(t)}{dt} + y(t)\frac{dy(t)}{dt} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t)+y^2(t)\right) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x^2+y^2 &= c_1^2 \\ z &= c_2 \end{aligned}}$$

$$\frac{dz(t)}{dt} = 0$$

$$\vec{\sigma}(t) = \Big(\overbrace{c_1 \cos\tfrac{t}{c_1^2}}^{x(t)}, \overbrace{c_1 \sin\tfrac{t}{c_1^2}}^{y(t)}, \overbrace{c_2}^{z(t)} \Big)$$



$$\vec{\sigma}'(t) = \left(-\frac{1}{c_1}\sin\frac{t}{c_1^2}, \frac{1}{c_1}\cos\frac{t}{c_1^2}, 0 \right)$$

Η καμπύλη η οποία διέρχεται από το $(1,2,1)$ είναι:

$$\vec{\sigma}(t) = \left(\sqrt{5}\cos\frac{t}{\sqrt{5}}, \sqrt{5}\sin\frac{t}{\sqrt{5}}, 1\right).$$

Προκύπτει για $\cos\frac{t_0}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow 0 < \frac{t_0}{\sqrt{5}} < \pi/2$

οπότε $\sin\frac{t_0}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

2. $\vec{F} = (x, x^2)$.

$\frac{dx}{dt} = x \Rightarrow x = c_1 e^t$ με $c_1 > 0$ για $x > 0$,
$c_1 < 0$ για $x < 0$.

$\frac{dy}{dt} = x^2 = c_1^2 e^{2t} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2} c_1^2 e^{2t} + c_2$

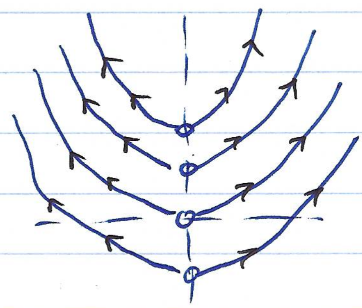
Επομένως:

$x(s) = c_1 s$ με $s \geq 0$

$y(s) = \frac{1}{2} c_1^2 s^2 + c_2$

Η σε πεπλεγμένη μορφή:

$$y = \frac{1}{2} x^2 + c_2$$



Η γραμμή η οποία διέρχεται από το (π.χ.) σημείο $(1, -2)$ είναι η:

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 5)$$

η σε παραμετρική μορφή: $x = e^t$

$$y = \frac{1}{2} e^{2t} - \frac{5}{2}$$

με $(1, -2) = (x(0), y(0))$ η: $x = s$

$$y = \frac{1}{2} s^2 - \frac{5}{2}$$

με $(1, -2) = (x(1), y(1))$.

B. Απόκλιση και Στροβιλισμός.

Σε ένα διανυσματικό πεδίο έχουμε n^2 μερικές παραγώγους.

Σε δύο ή τρείς διαστάσεις κάποιοι συνδυασμοί παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον.

i. Απόκλιση διανυσματικού πεδίου.

Ορίζεται για κάθε n και είναι βαθμωτή συνάρτηση:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

$n=2$: $\vec{F} = (F_x, F_y)$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}$.

$n=3$: $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ και $\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$.

$$\vec{\nabla}'\cdot\vec{F}' = \sum_i \frac{\partial}{\partial x'_i} F'_i(x') = \sum_{i,j,k} R_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} R_{ik} F_k$$

$$= \sum_{i,j,k} (R^T)_{ki} R_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k$$

$$= \sum_{j,k} \delta_{kj} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k = \vec{\nabla}\cdot\vec{F}$$

ii) Στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου.

Για $n=3$ ορίζεται ο στροβιλισμός διανυσματικού πεδίου ως:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \hat{i}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)$$

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} .$$

Ο στροβιλισμός είναι διανυσματικό πεδίο. *

Για $n=2$ η ποσότητα :

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$ είναι βαθμωτό μέγεθος. **

* Χρησιμοποιώντας το πλήρως αντισυμμετρικό σύμβολο ε_{ijk} ο στροβιλισμός γράφεται:

$$(\vec{\nabla}\times\vec{F})_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} F_k \qquad (i,j,k=1,2,3)$$

$$(\vec{\nabla}'\times\vec{F}')_i = \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x'_j} F'_k$$

$$= \sum_{j,k} \varepsilon_{ijk} \sum_{l,m} R_{jl} R_{km} \frac{\partial}{\partial x_l} F_m$$

Όμως:

$$\sum_{j,k,i} \varepsilon_{ijk} R_{jl} R_{km} R_{is} = \underbrace{1}_{\text{ορίζουσα του ορθογώνιου μετασχηματισμού}} \varepsilon_{slm} \Rightarrow$$

$$\sum_{j,k,i,s} \varepsilon_{ijk} R_{jl} R_{km} R_{is} \underset{(R^{-1})_{st}}{R_{ts}} = \sum_s R_{ts}\, \varepsilon_{slm} \Rightarrow$$

$$\sum \varepsilon_{tjk} R_{jl} R_{km} = \sum_s \varepsilon_{slm} R_{ts}$$

Άρα:

$$(\vec{\nabla}'\times\vec{F}')_i = \sum_{j,k,l,m} \varepsilon_{ijk} R_{jl} R_{km} \frac{\partial}{\partial x_l} F_m$$

$$= \sum_{j,k,l,m,s} R_{is}\, \varepsilon_{slm} \frac{\partial}{\partial x_l} F_m = \underbrace{\sum_s R_{is} (\vec{\nabla}\times\vec{F})_s}_{\text{μετασχηματισμός διανύσματος}}.$$

$\ast\ast$

$$\frac{\partial}{\partial x'} F_{y'} - \frac{\partial}{\partial y'} F_{x'} =$$

$$\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\cos\varphi\, F_y + \sin\varphi\, F_x\right)$$

$$- \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\sin\varphi\, F_y + \cos\varphi\, F_x\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} F_y - \frac{\partial}{\partial y} F_x$$ (Βαθμωτό).

iii Αστρόβιλα - Συντηρητικά Πεδία.

$\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{F}$ αστρόβιλο.

$\vec{F} = \vec{\nabla}f \quad (\Rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0)$

$\Downarrow$

$\vec{F}$ συντηρητικό.

$$\vec{F} = \vec{\nabla}f \overset{?}{\Longleftrightarrow} \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$$

Εάν $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ σε κατάλληλη περιοχή (αστρόβιλο)

$\Downarrow$

$\vec{F} = \vec{\nabla}f$ σε αυτή την περιοχή.

Το διανυσματικό πεδίο παράγεται από βαθμωτό δυναμικό.

iv Σωληνοειδή πεδία.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{F} = 0 \Longleftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$$

σε κατάλληλη περιοχή

Το διανυσματικό πεδίο παράγεται από διανυσματικό δυναμικό.

V. Παραδείγματα - Ασκήσεις.

1. Εάν $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ να δειχθεί ότι $\vec{F}=\vec{\nabla}f$

με:

$$f(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} F_x(t,y_0,z_0)dt+\int_{y_0}^{y} F_y(x,t,z_0)dt+\int_{z_0}^{z} F_z(x,y,t)dt.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}= F_x(x,y_0,z_0)+\int_{y_0}^{y}\underbrace{\frac{\partial F_y}{\partial x}(x,t,z_0)}_{=\frac{\partial F_x}{\partial t}(x,t,z_0)}dt+\int_{z_0}^{z}\underbrace{\frac{\partial F_z}{\partial x}(x,y,t)}_{=\frac{\partial F_x}{\partial t}(x,y,t)}dt$$

$$=\cancel{F_x(x,y_0,z_0)}+\cancel{F_x(x,y,z_0)}-\cancel{F_x(t,y_0,z_0)}$$

$$+F_x(x,y,z)-\cancel{F_x(x,y,z_0)} = F_x(x,y,z).$$

Συνεχίζοντας με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}f.$$

Το δυναμικό αυτό ικανοποιεί την $f(x_0,y_0,z_0)=0$.

Κάθε συνάρτηση δυναμικού ορίζεται μέχρι μία σταθερά.

$$\vec{F}=\vec{\nabla}f=\vec{\nabla}f' \Rightarrow \vec{\nabla}(f-f')=0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(f-f')=\frac{\partial}{\partial y}(f-f')=\frac{\partial}{\partial z}(f-f')=0 \Rightarrow f-f'=c.$$

2. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο:

$$\vec{F} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 0 \right).$$

Να ευρεθεί συνάρτηση δυναμικού f.

α).

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} \frac{t}{t^2+y_0^2}\,dt + \int_{y_0}^{y} \frac{t}{x^2+t^2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{x_0^2}^{x^2} \frac{ds}{s+y_0^2} + \frac{1}{2}\int_{y_0^2}^{y^2} \frac{ds}{x^2+s}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{ \ln\frac{x^2+y_0^2}{x_0^2+y_0^2} + \ln\frac{x^2+y^2}{x^2+y_0^2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2}.$$

β).

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + h_1(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{\partial h_1}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow h_1(y,z) = h_1(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial h_1}{\partial z} = 0 \Rightarrow h_1 = C.$$

$$\left.\begin{aligned} f(x,y,z) &= \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C \\ f(x_0,y_0,z_0) = 0 &\Rightarrow C = -\frac{1}{2}\ln(x_0^2+y_0^2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(x,y,z) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x_0^2+y_0^2}.$$

3. Εάν $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=0$ να δειχθεί ότι:

$$\vec{F}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$$

με
$$A_x=\int_0^z F_y(x,y,t)\,dt-\int_0^y F_z(x,t,0)\,dt$$

$$A_y=-\int_0^z F_x(x,y,t)\,dt$$

$$A_z=0.$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}=-(-F_x(x,y,z))=F_x(x,y,z)$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}=F_y(x,y,z)$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{A})_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}=-\int_0^z\frac{\partial F_x}{\partial x}(x,y,t)\,dt-\int_0^z\frac{\partial F_y}{\partial y}(x,y,t)\,dt+F_z(x,y,0)$$

$$=\int_0^z\frac{\partial F_z}{\partial t}(x,y,t)\,dt+F_z(x,y,0)=F_z(x,y,z).$$

Επειδή $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\phi)=0$ το διανυσματικό δυναμικό ορίζεται μέχρι την βαθμίδα μίας συνάρτησης.

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}+\vec{\nabla}\phi)=\vec{F}\quad\text{εάν}\quad\vec{\nabla}\times\vec{A}=\vec{F}.$$