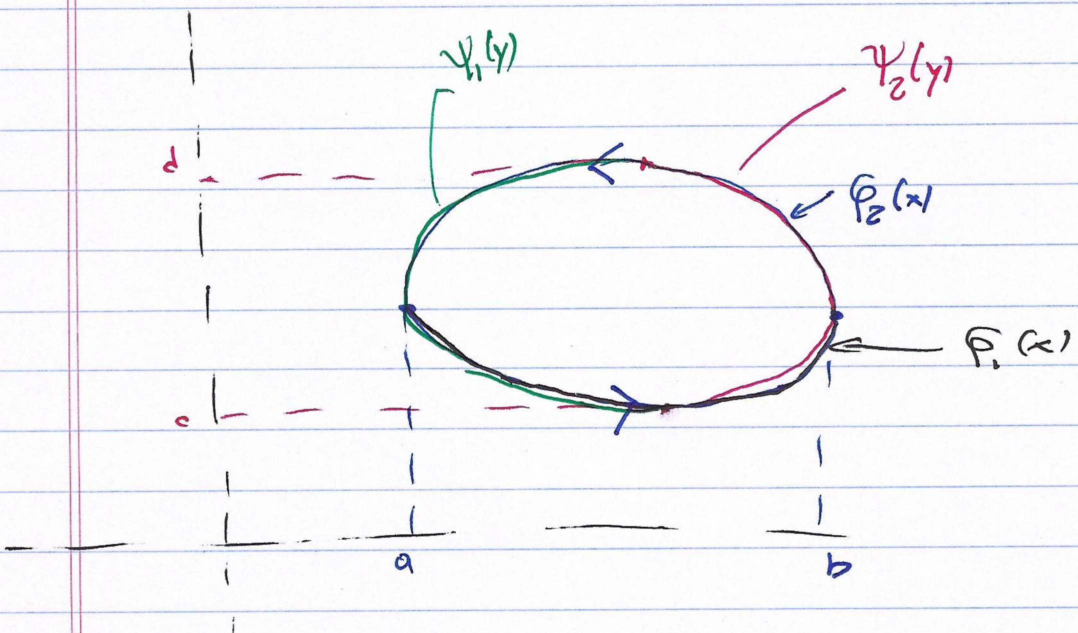
Θεώρημα Green.

Έστω D απλή περιοχή (τύπου 3) και ∂D το σύνορο αυτής με δεξιόστροφο προσανατολισμό.

Εάν $P(x,y)$, $Q(x,y)$ είναι C^1 συναρτήσεις σε ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει την D, τότε:

$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy}$$



$$D : \begin{cases} a \le x \le b, & \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \quad (\text{τύπου I}) \\ c \le y \le d, & \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \quad (\text{τύπου II}) \end{cases}$$

απλή περιοχή

∂D : απλή κλειστή καμπύλη →

(i). $$-\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy \right\} dx$$ (η D είναι τύπου 1)

$$= -\int_a^b \left[P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)) \right] dx \Rightarrow -\int_D \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \left[P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x)) \right] dx$$

(ii). $$\int_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = +\int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \right\} dx\,dy$$

$$= \int_c^d \left[Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y) \right] dy$$

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{\partial D} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l}$$

όπου $\vec{F}_1 = (P, 0, 0)$ και $\vec{F}_2 = (0, Q, 0)$.

(iii). $\partial D = \vec{\gamma}_1 + \vec{\gamma}_2$

$\vec{\gamma}_2$: $(x, \varphi_2(x))$, $b \le x \le a$

$\vec{\gamma}_1$: $(x, \varphi_1(x))$, $a \le x \le b$

Επομένως $$\int_{\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} = \int_a^b P(x,\varphi_1(x))\,dx + \int_b^a P(x,\varphi_2(x))\,dx \Rightarrow$$

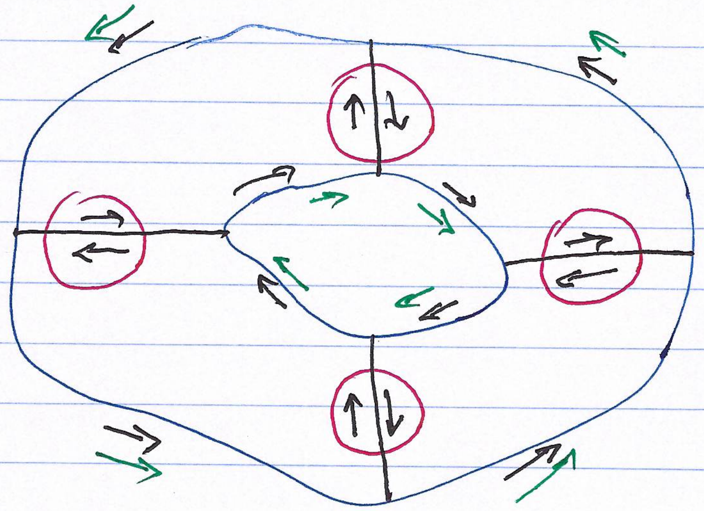
$$\int_{\partial D} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} = \int_a^b \left[P(x,\varphi_1(x)) - P(x,\varphi_2(x)) \right] dx.$$

(iv). Ομοίως $$\int_{\partial D} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} = \int_c^d \left[Q(\psi_2(y),y) - Q(\psi_1(y),y) \right] dy.$$

Άρα:

$$\boxed{\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \int_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

Για γενικότερες περιοχές χρησιμοποιούμε την αθροιστική ιδιότητα των ολοκληρωμάτων, π.χ.



1.
$$A(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

Από το Θεώρημα Green $(-y = P,\ x = Q)$

$$\frac{1}{2}\int_{\partial D}(-y\,dx + x\,dy) = \frac{1}{2}\int_{D}(1+1)\,dx\,dy = \int_D dx\,dy = A(D).$$

π.χ. για κύκλο ακτίνας a με κέντρο την αρχή:

$$\partial D : \quad (a\cos t,\ a\sin t) = \vec{\sigma}(t)$$

$$\vec{\sigma}'(t) = (-a\sin t,\ a\cos t)$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(-y(t)\frac{dx}{dt} + x(t)\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2}a^2 2\pi = \pi a^2.$$

Με διανυσματικό συμβολισμό:

έστω $\vec{F} = (F_x = P,\ F_y = Q,\ 0)$.

Τότε για χωρίο D του επιπέδου x-y:

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Θεωρούμε τον στροβιλισμό του $\vec{F}$:

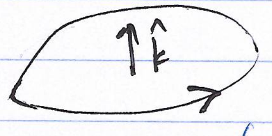
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = \hat{k}\,(\partial_x F_y - \partial_y F_x)$$

$$= \hat{k}\,(\partial_x Q - \partial_y P)$$

$$\Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \hat{k} = (\partial_x Q - \partial_y P).$$

Επομένως το Θεώρημα Green γράφεται:

$$\boxed{\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{D} (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \underbrace{\hat{k}\,ds}_{d\vec{S}}}$$



"Θεώρημα Stokes"?!

(Για επίπεδη κλειστή καμπύλη και το επίπεδο χωρίο που ορίζει αυτή).

Έστω $\vec{\sigma}(t)$ καμπύλη του επιπέδου (x,y):

$$\vec{\sigma}(t) = (x(t), y(t), 0)$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\tau}(t) = \frac{1}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}\left(x'(t), y'(t), 0\right)$$

Το διάνυσμα $\hat{n}(t) = \frac{1}{\|\vec{\sigma}'(t)\|}\left(+y'(t), -x'(t), 0\right)$

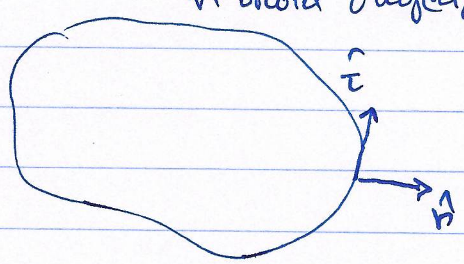
είναι κάθετο στην καμπύλη: $\hat{\tau}(t)\cdot\hat{n}(t) = 0$

με την ιδιότητα:

$$\hat{n}(t)\times\hat{\tau}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ +\frac{y'}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} & -\frac{x'}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} & 0 \\ \frac{x'}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} & \frac{y'}{\|\vec{\sigma}'(t)\|} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{k}.$$

Για κλειστή η οποία διαγράφεται δεξιόστροφα καμπύλη το $\hat{n}$ δείχνει στον εξωτερικό χώρο:



π.χ. για κύκλο:

$$\vec{\sigma}(t) = (a\cos t, a\sin t)$$

$$\vec{\sigma}'(t) = (-a\sin t, a\cos t) \Rightarrow \hat{\tau} = (-\sin t, \cos t)$$

$$\hat{n} = (\cos t, \sin t).$$

Επομένως το αριστερό μέλος του Θεωρήματος Green γράφεται:

$$\oint_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\partial D} Q\,dy - (-P)\,dx$$

$$= \oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dl \qquad \text{με } \vec{F} = (\overset{F_x}{\overset{\shortparallel}{Q}}, \overset{F_y}{\overset{\shortparallel}{-P}})$$

δηλαδή η "ροή" του $\vec{F}$ από την κλειστή καμπύλη ∂D ($\underbrace{\text{δηλαδή από το χωρίο } D}_{?}$).

Το δεξιό μέλος του Θεωρήματος Green γράφεται:

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_D \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$= \int_D \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,dx\,dy.$$

Οδηγούμαστε στο Θεώρημα της απόκλισης στο επίπεδο:

$$\boxed{\oint_{\partial D} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dl = \int_D \vec{\nabla}\cdot\vec{F}\,ds.}$$

ii.

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$Q = x,\; P = 0 \implies A(D) = \int x\,dy$$

$$P = -y,\; Q = 0 \implies A(D) = \int -y\,dx$$

Να ευρεθεί το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείει η έλλειψη:

$$x(t) = a\cos t$$
$$y(t) = b\sin t.$$

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(x(t)\frac{dy}{dt} - y(t)\frac{dx}{dt}\right)dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\,dt = \pi ab$$

$$\int x\,dy = \int_0^{2\pi} x(t)\frac{dy}{dt}\,dt = \int_0^{2\pi} ab\cos^2 t\,dt$$

$$= ab\,\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt = \pi ab.$$

iii. Δίδεται το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2+a^2}, \frac{x}{x^2+y^2+a^2} \right).$$

Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Green σε δίσκο ακτίνας b με κέντρο στην αρχή. Σχολιάστε το όριο $a \to 0$.

∂D

$$\int_{\partial D} F_x dx + F_y dy = \int_0^{2\pi} dt \left\{ -\frac{y(t)}{b^2+a^2}\frac{dx}{dt} + \frac{x(t)}{b^2+a^2}\frac{dy}{dt} \right\}$$

$$x(t) = b\cos t \qquad \frac{dx}{dt} = -b\sin t$$

$$y(t) = b\sin t \qquad \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

$$\Rightarrow \int_{\partial D} F_x dx + F_y dy = 2\pi \frac{b^2}{b^2+a^2}.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F_y}{\partial x} &= \frac{1}{x^2+y^2+a^2} - \frac{x\, 2x}{(x^2+y^2+a^2)^2} = \frac{y^2-x^2+a^2}{(x^2+y^2+a^2)^2} \\ \frac{\partial F_x}{\partial y} &= \frac{y^2-x^2-a^2}{(x^2+y^2+a^2)^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_D \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) dx dy = \int_D \frac{2a^2}{(x^2+y^2+a^2)^2} dx dy = 2a^2 \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{1}{(\rho^2+a^2)^2} \rho\, d\rho\, d\phi$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{b^2} \frac{1}{(t+a^2)^2} dt = -2\pi a^2 \left. \frac{1}{t+a^2} \right|_0^{b^2} = -2\pi a^2 \left(-\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2+a^2} \right)$$

$(\rho^2 = t)$

$$= 2\pi a^2 \frac{b^2+a^2-a^2}{a^2(b^2+a^2)} = 2\pi \frac{b^2}{a^2+b^2}.$$

Για $a \to 0$ δεν ισχύει το θεώρημα Green γιατί η ποσότητα

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}$$ μηδενίζεται για κάθε $(x,y) \neq (0,0)$

αλλά απειρίζεται στο $(0,0)$.

Σε αυτή την περίπτωση

$$\oint_{\partial D} F_x dx + F_y dy = 2\pi$$

για κάθε κλειστή καμπύλη η οποία περικλείει το σημείο $(0,0)$.