

Στη σελίδα αυτή γράψτε μόνο τα στοιχεία σας.

Γράψτε τις απαντήσεις σας στις επόμενες σελίδες, κάτω από τις αντίστοιχες ερωτήσεις. Στις απαντήσεις σας μην ξεπερνάτε, για οποιοδήποτε λόγο, τα καθορισμένα όρια αριθμού γραμμών.

Γράψτε τον ΑΜ σας σε όλες τις σελίδες.

Επώνυμο:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Όνομα:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

ΑΜ:

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Βαθμοί

1	2	3	Σύνολο

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Θέμα 1 [3,5 μονάδες]. Δεχόμενοι ότι ο αντίστροφος του $2 \pmod{13}$ είναι ο 7 (βλ. επόμενο θέμα) να υπολογίσετε το 2^{10} με μόνον έναν πολλαπλασιασμό.

Απάντηση: Από το «μικρό» θεώρημα του Fermat έχουμε ότι

$$2^{12} = 1 \pmod{13}.$$

Επομένως

$$2^{10} = 2^{12}/2^2 = 7^2 = 49 = 10 \pmod{13}.$$

Θέμα 2 [3.5 μονάδες]. Να υπολογίσετε, εφαρμόζοντας προσεκτικά δύο βήματα του αναδρομικού γενικευμένου αλγορίθμου του Ευκλείδη, τον αντίστροφο του $2 \pmod{13}$.

Απάντηση: Εφαρμόζουμε, σύμφωνα με την εκφώνηση, τον αλγόριθμο στην Εικόνα 1.6 του βιβλίου. Για να υπολογίσουμε το

$$(x, y, d) = \text{extended-Euclid}(13, 2),$$

θα βρούμε πρώτα το

$$(x', y', d') = \text{extended-Euclid}(2, 1).$$

Αναδρομικά, θα χρειαστούμε το

$$(x'', y'', d'') = \text{extended-Euclid}(1, 0).$$

Το τελευταίο όμως, σύμφωνα με τον αλγόριθμο, είναι $(1, 0, 1)$. Οπότε, σύμφωνα με τον αλγόριθμο, προκύπτει ότι

$$(x', y', d') = \left(0, 1 - \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor 0, 1 \right) = (0, 1, 1).$$

Από το τελευταίο, με εφαρμογή του αλγορίθμου πάλι, έχουμε

$$(x, y, d) = \left(1, 0 - \left\lfloor \frac{13}{2} \right\rfloor 1, 1 \right) = (1, -6, 1).$$

Επομένως ο αντίστροφος του $2 \pmod{13}$ είναι ίσος με $-6 = 7 \pmod{13}$.

Θέμα 3 [3.5 μονάδες]. Θεωρούμε το κατευθυνόμενο (προσανατολισμένο) γράφημα με τέσσερις κορυφές s, a, b, c και τέσσερις ακμές

$$\{(s, a), (s, b), (a, c), (b, c)\}.$$

Να απονείμουμε θετικά βάρη σε τρεις από τις ακμές και αρνητικό στη μία έτσι ώστε ο αλγόριθμος Dijkstra να αποτυγχάνει να βρει τις σωστές διαδρομές ελαχίστου βάρους από την s . Να εξηγήσετε γιατί αποτυγχάνει.

Απάντηση: Απονέμουμε στις ακμές $(s, a), (s, b), (a, c), (b, c)$. βάρη, π.χ., αντίστοιχως $1, 3, 1, -2$. Στην πρώτη φάση, ο αλγόριθμος Dijkstra θα υπολογίσει $\text{dist}(a) = 1$ και στη δεύτερη φάση $\text{dist}(c) = 2$. Όμως το ελαχιστοβαρές μονοπάτι από την s στην c έχει βάρος 1 .