

Απειροστικός Λογισμός II - Ακαδ. έτος 2023-24

Ασκήσεις 3.

1. Ναδειχθεί ότι η σύνθεση ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση.
2. Ναδειχθεί ότι το άθροισμα ομοιόμορφα συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Ναδειχθεί ότι δεν ισχύει (εν γένει) η αντίστοιχη ιδιότητα για το γινόμενο δύο συναρτήσεων, ισχύει όμως αν οι δύο συναρτήσεις υποτεθούν επιπλέον φραγμένες.
3. (α) Έστω $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και είναι πραγματικός αριθμός. Ναδειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
(β) Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν τα όρια $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$ και είναι πραγματικοί αριθμοί. Ναδειχθεί ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
4. Ναδειχθεί ότι αν μία συνεχής συνάρτηση $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ επιδέχεται ασύμπτωτη ευθεία στο $+\infty$, δηλαδή αν υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x - \beta) = 0$, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.
5. Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ομοιόμορφα συνεχής. Ναδειχθεί ότι υπάρχουν $A, B > 0$ ώστε $|f(x)| \leq A|x| + B$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
6. Έστω $f : [0, +\infty)$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι αν υπάρχει $a > 0$ ώστε η f να είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[a, +\infty)$, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής και στο $[0, +\infty)$.
7. Ναεξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς/Lipschitz συνεχείς στα αντίστοιχα σύνολα:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} \quad \sin \frac{1}{x} \quad \text{στο } (0, +\infty) & \text{(ii)} \quad x \sin \frac{1}{x} \quad \text{στο } (0, +\infty) \\ \text{(iii)} \quad \frac{\cos(x^3)}{x} \quad \text{στο } (1, +\infty) & \text{(iv)} \quad \sqrt[3]{x} \quad \text{στο } [0, +\infty) \end{array}$$

8. Ναδειχθεί ότι κάθε συνεχής και περιοδική συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής.
9. Ναδειχθεί ότι αν μία συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ είναι συνεχής, μονότονη και φραγμένη, τότε είναι ομοιόμορφα συνεχής.