Πρόταση $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ δυναμοσειρά. Ακτίνα σύγκλισης:

$$R = \frac{1}{\limsup |a_k|^{1/k}}$$

(για $\limsup = 0$ τότε $R = \infty$)

παράσταση

Απόδ. (1) Έστω $0 \leq |x| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} < S < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ οι όροι δεξιά του S είναι πεπερασμένοι

$\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad |x| \cdot \sqrt[n]{|a_n|} < S \quad \forall \; n \geq n_0$

$\Rightarrow \qquad |x|^n \cdot |a_n| < S^n$

και από κρ. σύγκρισης η Σ συγκλίνει.

(2) Έστω $1 < s < |x| \limsup \sqrt[k]{|a_k|} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ οι όροι δεξιά του s είναι άπειροι

$\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ υπακολουθία $|x| \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq s \Rightarrow$

$$|x|^{k_n} \cdot |a_{k_n}| \geq \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{s^{k_n}}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow |x|^k |a_k| \not\to 0$

Υπενθ. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ δυναμοσειρά

Αν $\exists \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = a \Rightarrow R = 1/a$ = ακτίνα σύγκλισης

$\forall |x| < R \Rightarrow \Sigma a_k x^k$ συγκλίνει

$\forall |x| > R \Rightarrow \Sigma a_k x^k$ αποκλίνει

ΘΕΩΡ (Παραγώγιση των δυναμοσειρών)

Έστω $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$ και

Έστω

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad , \quad x\in(-R,R)$$

Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη με

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}$$

Επίσης: $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $n=0,1,2,\ldots$

και $\forall |x|<R$,

και $\forall |x|<R$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,x]$

με

$$\int_0^x f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Απόδ Δείχνουμε ότι $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ $\forall |x|<R$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x)$ έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την $f(x)$

Παίρνω $|x|<R \Rightarrow \exists\ \delta>0: |x|+\delta<R \Rightarrow$

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|(|x|+\delta)^n<+\infty$$

Έστω $0<|t|<\delta \Rightarrow$

$$\left|\frac{f(x+t)-f(x)}{t}-\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right| =$$

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+t)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{t} - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} t}{t} \right| =$$

$$= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \left((x+t)^n - x^n - n x^{n-1} t \right)}{t} \right| \circledast \text{όπου}$$

όπου

$$|(x+t)^n - x^n - n x^{n-1} t| = \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^k \right| =$$

$$= t^2 \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2} \right| =$$

$$= \frac{t^2}{\delta^2} \left| \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} t^{k-2} \delta^2 \right| \leq \quad |t| < \delta$$

$$\leq \frac{t^2}{\delta^2} \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k \leq$$

$$\leq t^2/\delta^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} \delta^k =$$

$$= t^2/\delta^2 \, (|x|+\delta)^n$$

Άρα

$$\circledast \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n \cdot t^2/\delta^2 \, (|x|+\delta)^n}{t} \right| \leq$$

$$\leq \frac{|t|}{\delta^2} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot (|x|+\delta)^n \xrightarrow[t \to 0]{} 0$$

Έστω τώρα

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

Η F έχει ίδιο R με f, άρα παραγωγίζεται διαφορικά με

$$F'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=f(x)\ \underset{\text{ΑΛ}}{\overset{\text{ΑΘΘ}}{\Longrightarrow}}$$

$\hookrightarrow$ ολοκλ/μη σαν συνεχής, άφου παραγ/μη.

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x F'(t)\,dt=F(x)-F(0)=F(x)\ \blacksquare$$

$\boxed{\text{Εφαρμογή}}$ $\longrightarrow$

~~Να βρεθεί το $T_{n,f,0}(x)$ για την~~

$f(x)=\arctan x,\quad |x|\le 1$. Να παρασταθεί με δυναμοσειρά η f

$$f(x)=\arctan x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$$ και

$$g(t)=\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+\dots+(-1)^n t^{2n}+\dots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t^2)^n=$$ γεωμ. σειρά συγκλίνουσα για $|t^2|<1$

$|t|<1$.

Άρα

$$f(x)=\arctan x=\int_0^x g(t)\,dt=$$ ολοκλήρωμα δυναμοσειράς

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot x^{2n+1}=$$

x^3 x^5 x^7 x^9

Υπενθ:

$$g(t) = \frac{1}{1+t^2} \qquad C^\infty \text{ στο } \mathbb{R}.$$

βρήκαμε

$$T_{2n,g,0}(t) = T_{2n+1,g,0}(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k}$$

δείχνοντας ότι

$$\frac{g(t) - T_{2n,g,0}(t)}{t^{2n}} \to 0.$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ \text{μερικά αθροίσματα}}}{T_{n,g,0}(t)} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k \quad \text{που έχει } R = 1.$$

$$\Downarrow$$

για $|t|<1$: $\boxed{g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k}$ $\quad (a_n = 1)$.

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\int_0^x g(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+2}}$$

Από $\boxed{g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k}}$

$$\Downarrow$$

$$= \underset{a_0}{1} - \underset{a_2}{t^2} + \underset{a_4}{t^4} - t^6 + \cdots$$

$$\left(\begin{array}{l} a_{2n} = (-1)^n \\ a_{2n+1} = 0 \end{array} \right)$$

$$\Downarrow$$

Να προσιχηθεί της Ασκ 7:

$\boxed{\text{Ασκ}}$ $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ n-φορές παρα/μες

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Να βρεθεί το $T_{n, \lambda f + \mu g, x_0}(x)$.

$$T_{n, \lambda f + \mu g, x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda f + \mu g)^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)})(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + \mu \sum \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

$$= \lambda T_{n, f, x_0}(x) + \mu T_{n, g, x_0}(x).$$

Ασκ. 9

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor της arctanx, $x\in[-1,1]$, (-1,1) υπολογίστε το άθροισμα

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$$

Απαντ.

$$\boxed{\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}}, \quad \text{για } -1\le x\le 1 \;?$$

Υπενθύμιση $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \arctan x=\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\Big)dt=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\,dt$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

πίσω.

Άρα

$$\arctan\frac{1}{\sqrt3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{\sqrt3}\Big)^{2n+1}\cdot\frac{1}{2n+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Big(\frac{1}{3}\Big)^n\frac{1}{2n+1}\Rightarrow$$

$$\underbrace{\sqrt3\arctan\frac{1}{\sqrt3}}_{\pi/6}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$$

$$=\sqrt3\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}} = \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^{2n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{3^n} = \sum \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^{2n+1}} =$$

$$= \sqrt{3} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}_{\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \sqrt{3} \underbrace{\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3} \cdot \pi/6.$$

21/2/11

Ασκ 6β (συνέχεια)

$$\int_0^1 n x^{n-1} f(x)dx = x^n f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 x^n f'(x)dx = f(1) - \int_0^1 x^n f'(x)dx \Rightarrow$$

$$\lim \int_0^1 n x^{n-1} f(x)dx = f(1) - 0 = f(1) \blacksquare$$

Ασκ 7(β)

ΝΔο $T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$, για $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1,1)$.

Ποιό είναι το $T_{n,g,0}$ για $g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$;

Απαντ.

$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = \ln(1) = 0.$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0) = 1.$

$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0) = -1.$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(0) = 2$

$f^{(4)}(x) = (-1)^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (1+x)^{-4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = (-1)^3 3!$

επαγωγικά:

$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} (k-1)! (1+x)^{-k} \Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$

Άρα

$$\boxed{T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}}$$

γνωστό.

21/2/11

Ασκ 7β (συνέχεια).

$$T_{n,f\pm g,x_0}(x) = \sum \frac{(f\pm g)^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= \sum \frac{f^{(k)}(x_0) \pm g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= \sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \pm \sum \frac{g^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= T_{n,f,x_0}(x) \pm T_{n,g,x_0}(x).$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = f(x) - f(-x) = f(x) - h(x).$$

Έστω $h(x) = f(-x) \Rightarrow h(0) = f(0) = 0.$

$h'(x) = f'(x)(-1) = -f'(-x) \Rightarrow h'(0) = -f'(0).$

$h''(x) = f''(-x) \Rightarrow \qquad h''(0) = f''(0)$

Επαγωγικά:

$h^{(k)}(0) = (-1)^k f^{(k)}(0).$

$$T_{n,h,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k \cdot (-1)^{k-1} (k-1)!\, x^k}{k!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{-x^k}{k}$$

$$T_{n,g,0}(x) = T_{n,f,0}(x) - T_{n,h,0}(x) = \sum \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} - \sum \frac{(-1) \cdot x^k}{k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}\left[(-1)^{k-1} + (+1)\right]$$

Ασκ. $f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Να βρεθεί

$T_{n,f,0}(x) = ;$

Απάντηση f παραγωγίσιμη στο 0? Πόσες φορές;

$x\neq 0$:

$f'(x) = e^{-1/x^2}\underbrace{\left(-1/x^2\right)'}_{P_1(1/x)} = f(x)\cdot P_1(1/x)$

$f''(x) = f'(x)\cdot P_1(1/x) + f(x)\left[P_1(1/x)\right]' =$

$= f(x)\cdot\left(P_1(1/x)\right)^2 + f(x)\left(P_1(1/x)\right)' =$

$= f(x)\cdot P_2(1/x)$

Επαγωγικά, $\forall\ x\neq 0\ \exists\ f^{(k)}(x) = f(x)\cdot P_k(1/x)$.

$x=0$

f συνεχής στο 0

$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x e^{1/x^2}} \overset{y=1/x}{=} \lim_{y\to\pm\infty}\frac{y}{e^{y^2}} \overset{dlH}{=} 0.$

και, επαγωγικά

$f^{(k)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f^{(k-1)}(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)P_{k-1}(1/x)}{x} \overset{y=1/x}{=}$

$= \lim_{y\to\pm\infty}\frac{y P_{k-1}(y)}{e^{y^2}} \overset{dlH}{=} 0$

Άρα: $\boxed{T_{n,f,0}(x)\equiv 0}$

Ασκ.

Να υπολογιστεί προσέγγιση του (μη-στοιχειώδους) ολοκληρώματος

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$$

και να εκτιμηθεί το σφάλμα.

Απάντ.

Χρησιμοποιώντας το $T_{4,f,0}(x)$, για $f(x)=e^x$, έχω:

$$e^x \cong T_{4,f,0}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \Rightarrow$$

$$e^{-t^2} \cong T_{4,f,0}(-t^2) = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{t^8}{4!} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt \cong \int_0^{1/2} (1 - \ldots\ldots)\,dt \cong 0{,}4613$$

Σφάλμα?

$$e^{-t^2} = T_{4,f,0}(-t^2) + R_{4,f,0}(-t^2) \Rightarrow$$

$$e^{-t^2} - T_{4,f,0}(-t^2) = R_{4,f,0}(-t^2) \Rightarrow$$

$$\left| \int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt - \int T_{4,f,0}(-t^2)\,dt \right| = \left| \int_0^{1/2} R_{4,f,0}(-t^2)\,dt \right|$$

$$\leq \int_0^{1/2} |R_{4,f,0}(-t^2)|\,dt =$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{f^5(\xi)}{5!} |-t^2|^5\,dt = \qquad e^{\xi} < 1.$$

$$= \int_0^{1/2} \frac{e^{\xi}}{5!} t^{10}\,dt \quad (*) \quad \text{με} \ \ldots < -t^2 < \xi < 0$$

Άσκ.

Να βρεθεί προσέγγιση του $\cos(0,2)$ μέσω του $T_{4,\cos,0}(x)$ και να εκτιμηθεί το σφάλμα.

Απάντ.

$$T_{2n,\cos,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$= T_{2n+1,\cos,0}(x) \Rightarrow$$

$$T_{4,\cos,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \Rightarrow$$

$$T_{4,\cos,0}(0,2) = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{2}{10}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{10}\right)^4.$$

Lagrange:

$$|R_{4,\cos,0}(x)| = |R_{5,\cos,0}(x)| = \frac{|\cos^{(6)}(\xi)|}{6!}|x|^6 \Rightarrow$$

$$|R_{4,\cos,0}(0,2)| = \frac{|\cos\xi|}{6!}(0,2)^6 < \frac{1}{6!}\cdot\frac{2^6}{10^6} =$$

$$0 < \xi < 0,2$$

$$= \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot2\cdot3}\cdot\frac{2^6}{10^6} = \frac{2^2}{45}\cdot\frac{1}{10^6} =$$

$$= \frac{4}{45}\cdot\frac{1}{10^6} < \frac{4,5}{45}\cdot\frac{1}{10^6} = \frac{1}{10^7} =$$

$$= 0,0000001$$