ΜΑΘΗΜΑ 24
ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ (Taylor)

Εστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $n+1$ φορές παραγωγίσιμη στο $[a,b]$, $x_0\in[a,b]$. Τότε, $\forall x\in[a,b]$:

(1) Μορφή Cauchy του R_{n,f,x_0}: $\exists\ \xi\in[x,x_0]$ (ή $[x_0,x]$):

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0)$$

(2) Μορφή Lagrange του R_{n,f,x_0}: $\exists\ \xi\in[x,x_0]$ (ή $[x_0,x]$):

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(3) Ολοκληρωτική μορφή του R_{n,f,x_0}: Αν η $f^{(n+1)}$ είναι R-ολοκλ., τότε

$$R_{n,f,x_0}(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$$

Απόδ. Σταθεροποιούμε το x και θέτουμε $\phi:[a,b]\to\mathbb{R}$:

$$\phi(t)=R_{n,f,t}(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k\Rightarrow$$

$$\phi'(t)=-f'(t)-\underbrace{\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k-\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}\right]}_{\text{τηλεσκοπική}}$$

$$=-f'(t)-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+f'(t)=$$

$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Παρατηρούμε επίσης:

$$\phi(x_0) = R_{n,f,x_0}(x) \qquad \& \qquad \phi(x) = R_{n,f,x}(x) = 0$$

(i) Για μορφή Cauchy: ΘΜΤ για ϕ στο $[x, x_0]$ (ή $[x_0, x]$.)

$$R_{n,f,x_0}(x) = \phi(x_0) - \phi(x) = \phi'(\xi)(x_0 - x) =$$

$$= -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n \cdot (x_0 - x).$$

(ii) Για μορφή Lagrange: Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του Cauchy για $\phi(t)$ και $g(t) = (x-t)^{n+1}$ στο $[x, x_0]$: $\exists\, \xi$ με

$$\frac{R_{n,f,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\phi(x_0) - \underbrace{\phi(x)}_{=0}}{g(x_0) - \underbrace{g(x)}_{=0}} = \frac{\phi'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n}{(n+1)(x-\xi)^n(-1)}$$

$$\Rightarrow R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

(iii) Για ολοκληρωτική μορφή: ϕ' ολοκληρώσιμη από υπόθ. $\Rightarrow$

$$R_{n,f,x_0}(x) = \phi(x_0) - \phi(x) = \int_x^{x_0} \phi'(t)\,dt =$$

$$= -\int_x^{x_0} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\,dt. \qquad \blacksquare$$

Παραδείγματα Π.Τ.

① $f(x)=e^x$, $x\in\mathbb{R}$, $x_0=0$.

Τότε: $f^{(k)}(x)=e^x$, $\forall k\in\mathbb{N}_0$ και $f^{(k)}(0)=1$. Άρα

$$T_{n,f,0}(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(x-0)+\frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n$$

$$=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}\Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}}$$

② $f(x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$, $x_0=0$.

Γνωρίζουμε:
$$\left.\begin{aligned} f'(x)&=-\sin x\\ f''(x)&=-\cos x\\ f'''(x)&=\sin x\\ f^{(4)}(x)&=\cos x \end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} f^{(2k)}(x)&=(-1)^k\cos x\\ f^{(2k-1)}(x)&=(-1)^k\sin x \end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$f^{(2k)}(0)=(-1)^k$$
$$f^{(2k-1)}(0)=0.$$

Άρα:

$$T_{2n,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}(x-0)^{2n} =$$

$$= 1 + 0 + \frac{(-1)}{2!}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + 0 + \frac{(-1)}{6!}x^6 + \cdots +$$

$$+ \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} =$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}.$$

Επίσης, επειδή $f^{(2n+1)}(0) = 0$, έχουμε

$$T_{2n,f,0}(x) = T_{2n+1,f,0}(x),$$

άρα:

$$\boxed{T_{2n,f,0}(x) = T_{2n+1,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}$$

3 $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $x_0 = 0$.

Ανάλογα με την $\cos x$, βρίσκουμε

$$\left.\begin{array}{l} f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x \\ f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f^{(2k)}(0) = 0 \\ f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \end{array}\right., \text{ άρα}$$

$$T_{2n+1,f,0}(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x-0)^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{f^{(2n+1)}(0)}{(2n+1)!}(x-0)^{2n+1} =$$

$$= 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + 0 + \frac{(-1)}{3!}x^3 + 0 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

και $T_{2n+2,f,0}(x) = T_{2n+1,f,0}(x)$, άρα

$$\boxed{T_{2n+1,f,0}(x) = T_{2n+2,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}$$

4) $f(x) = \ln(1+x)$, $x \in (-1, 1]$, $x_0 = 0$.

Παρατηρούμε ότι:

$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$

$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2}$

$f'''(x) = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$

$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4}$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = (-1)^{(k-1)}(k-1)!\,(1+x)^{-k} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$

$\Downarrow$

$f(0) = \ln 1 = 0$

$f'(0) = 1$

$f''(0) = -1!$

$f'''(0) = 2!$

$f^{(4)}(0) = -3!$

$\vdots$

$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, $\forall\, k \geq 1$, άρα:

$$T_{n,f,0}(x) = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1!}{2!}x^2 + \frac{2!}{3!}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{n!}x^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \Rightarrow$$

$$\boxed{T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k .}$$

(5) $f(x) = (1+x)^a$, $x > -1$, $x_0 = 0$, $a > 0$.

Παρατηρούμε ότι:

$f(0) = 1$

$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \Rightarrow f'(0) = a$.

$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \Rightarrow f''(0) = a(a-1)$.

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)(1+x)^{a-k} \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = a(a-1)\cdots(a-k+1)$.

Θέτουμε

$$\frac{a(a-1)(a-k+1)}{k!} =: \binom{a}{k},$$

[για $a \in \mathbb{N}$ το $\binom{a}{k}$ συμπίπτει με το γνωστό σύμβολο].

και παίρνουμε:

$$\boxed{T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k}$$

Υπολογισμός υπολοίπων.

1. $f(x)=e^x \rightsquigarrow T_{n,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Έστω $x\neq 0$. Από την μορφή Lagrange του υπολοίπου:

$$R_{n,f,0}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

για κάποιο ξ μεταξύ 0 και x. Επειδή $\xi\leq|\xi|\leq|x|$ και $e^x \uparrow$, έχουμε:

$$|R_{n,f,0}(x)|=\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leq\frac{e^{|x|}\cdot|x|^{n+1}}{(n+1)!}=:a_n$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\cdot\frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}}=\frac{|x|}{n+2}\to 0$

$\Rightarrow a_n\to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_{n,f,0}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^x-T_{n,f,0}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow T_{n,f,0}(x)\xrightarrow[n\to\infty]{} e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}}$

(2) $f(x)=\cos x \rightsquigarrow T_{2n,f,0}(x)=T_{2n+1,f,0}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$

Εστω $x\neq 0. \Rightarrow$ (Lagrange) $\exists\ \xi$ μεταξύ 0 και x:

$$|R_{2n}(x)|=\left|\frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right|=\frac{|f^{(2n+1)}(\xi)|}{(2n+1)!}|x|^{2n+1}$$

$$\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}=:a_n \qquad (\underbrace{|f^{(2n+1)}}_{\text{σαν sin ή cos}}(\xi)|\leq 1)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{|x|}{2n+2}\longrightarrow 0 \Rightarrow a_n\longrightarrow 0 \Rightarrow \overset{=R_{2n+1}(x)}{R_{2n}(x)}\longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow \cos x - T_{2n}(x)\longrightarrow 0 \Rightarrow \cos x=\lim T_{2n}(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}}$$

(3) $f(x)=\sin x \rightsquigarrow T_{2n+2}(x)=T_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \xrightarrow{\text{(Lagrange)}}$

$$\Rightarrow |R_{2n+1}(x)|=\frac{|f^{(2n+2)}(\xi)|}{(2n+2)!}|x|^{2n+2}\leq\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

οπως προηγ. $|R_{2n+1}(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Rightarrow$

$$\boxed{\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.}$$

4 $f(x) = \ln(1+x), \quad x \in (-1, 1]$.

Είδαμε ότι
$$T_{n,f,0}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

Έστω $x > -1$. Θα υπολογίσουμε το υπόλοιπο $R_{n,f,0}(x)$ μέσω της ολοκληρωτικής μορφής:

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_0^x \frac{(-1)^n \cdot n!}{(1+t)^{n+1}} \cdot (x-t)^n \, dt =$$

$$= (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}} \, dt =$$

$$= (-1)^n \int_0^x \left(\frac{x-t}{1+t}\right)^n \frac{dt}{1+t} \quad (*).$$

Θέτουμε: $\phi(t) = \dfrac{x-t}{1+t} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1+\phi(t) = \dfrac{1+t}{1+t} + \dfrac{x-t}{1+t} = \dfrac{1+x}{1+t} \neq 0 \\[2ex] \phi'(t) = (1+\phi(t))' = -\dfrac{1+x}{(1+t)^2} = -(\phi(t)+1) \cdot \dfrac{1}{1+t} \end{cases}$$

Άρα:

$$\circledast = (-1)^n \int_0^x \phi(t)^n \frac{dt}{1+t} =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_0^x \phi(t)^n (-1) \frac{1+\phi(t)}{1+\phi(t)} \cdot \frac{dt}{1+t} =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{\phi(t)^n}{1+\phi(t)} \phi'(t)\, dt \quad \circledast\circledast$$

Θέτουμε τώρα $g(s) = \frac{s^n}{1+s} \Rightarrow$

$$\circledast\circledast = (-1)^{n+1} \int_0^x g(\phi(t)) \cdot \phi'(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_{\phi(0)}^{\phi(x)} g(s)\, ds =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_x^0 \frac{s^n}{1+s}\, ds =$$

$$= (-1)^n \int_x^0 \left(-\frac{s^n}{1+s}\right) ds \quad \circledast\circledast\circledast$$

Παρατηρούμε ότι $-1 < x < 0$ ή $0 < x \leq 1$.

(i) Αν $-1 < x \leq s \leq 0 \Rightarrow 0 < x+1 \leq s+1 \Rightarrow \frac{1}{1+s} \leq \frac{1}{1+x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |R_{n,f,0}(x)| \leq \int_x^0 \frac{|s|^n}{1+s}\, ds \leq \frac{1}{1+x} \int_x^0 |s|^n\, ds =$$

$$= \frac{1}{x+1}\int_x^0 (-s)^n\,ds = \frac{1}{x+1}\int_x^0 \left(-\frac{(-s)^{n+1}}{n+1}\right)' ds =$$

$$= \frac{1}{x+1}\cdot\left[-\frac{(-s)^{n+1}}{n+1}\right]_x^0 = \frac{1}{x+1}\cdot\frac{(-x)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{|x|^{n+1}}{1+x}\cdot\frac{1}{n+1} = a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ii) Αν $0 < x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq s \leq x \leq 1$.

$$|R_n(x)| = |(*)(*)(*)| = \left|\int_x^0 \left(-\frac{s^n}{1+s}\right)ds\right| = \int_0^x \frac{s^n}{\underbrace{1+s}_{\geq 1}}\,ds \leq$$

$$\leq \int_0^x s^n\,ds = \frac{x^{n+1}}{n+1} = a_n \to 0$$

Σε κάθε περίπτωση, για $x \in (-1, 1]$:

$$\ln(1+x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

(σειρά Mercator).

Εφαρμογή $x = 1 \Rightarrow$

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots$$

(τύπος του Leibniz)

Πχ (υπόλοιπα)

$f(x) = (1+x)^a \qquad x > -1, \quad a \geq 0$

$\Downarrow$

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} x^k$$

Με $a \notin \mathbb{N}$ και $|x| < 1$: Cauchy για υπόλ.:

$\exists\, \xi$ μεταξύ $0, x$:

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n (x-0) =$$

$$= \frac{a(a-1)(a-n)(1+\xi)^{a-n-1}}{n!}(x-\xi)^n x =$$

$$= \frac{a(a-1)(a-n)}{n!} \cdot \left(\frac{x-\xi}{1+\xi}\right)^n \cdot (1+\xi)^{a-1} \cdot x$$

(1) $\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| \leq |x| < 1$:

Για $0 \leq \xi \leq x < 1$:

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{x-\xi}{1+\xi} \leq \frac{x}{1+\xi} \leq x = |x|$$

Για $-1 < x \leq \xi \leq 0$:

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \frac{\xi-x}{1+\xi} \overset{?}{\leq} |x| = -x \iff$$

(2) ~~Άρα:~~

$$\left|R_{n,f,0}(x)\right| \leq \underbrace{\left|\frac{a(a-1)(a-n)}{n!}\right| \left|x^{n+1}\right|}_{\gamma_n \to 0} \cdot \underbrace{\left|(1+\xi)^{a-1}\right|}_{\text{φραγμ., } \exists \xi \in (0,x)}$$

$$\left|(1+\xi)^{a-1}\right| = e^{(a-1)\ln(1+\xi)} \quad \text{φραγμ.}$$

$$\Downarrow$$

$$R_{n,f,0}(x) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \quad \text{και}$$

$$\boxed{(1+x)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k \qquad -1 < x < 1}$$

~~→ Για $|x| > 1$ από κρ. λόγου η Σ αποκλίνει~~

~~→ Για $|x| = 1$~~