Αφού h συνεχής $\Rightarrow H(y):=\int_0^y h(t)\,dt$ παραγ. με $H'(y)=h(y)$.

Παρατήρηση:

$$K(x)=\underbrace{H(f(x))}_{\text{σύνθ. παραγ/μων}} \Rightarrow K'(x)=(H\circ f)'(x)=$$
$$=H'(f(x))\cdot f'(x)=$$
$$=h(f(x))\cdot f'(x).$$

$\boxed{\text{Άσκ 6}}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, $\delta>0$, $g(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt$.

Ν.δ.ο. g παραγωγίσιμη και να βρείτε την g'.

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

Απάντ.

$$g(x)=\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\,dt=\int_0^{x+\delta} f(t)\,dt-\int_0^{x-\delta} f(t)\,dt=$$
$$=F(x+\delta)-F(x-\delta)=(F\circ\mu_\delta)(x)-(F\circ\mu_{-\delta})(x)$$

(όπου $\mu_\delta(x)=x+\delta$, $\mu_{-\delta}(x)=x-\delta$).

παραγωγίσιμη και

$$g'(x)=(F'\circ\mu_\delta)(x)\cdot\mu_\delta'(x)-(F'\circ\mu_{-\delta})(x)\cdot(\mu_{-\delta})'(x)=$$
$$=f(x+\delta)-f(x-\delta).$$

$\boxed{\text{Άσκ 7}}$

$g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγ., $Z(x):=\int_{h(x)}^{g(x)} t^2\,dt$

Ν.δ.ο. Z παραγ. και να βρεθεί η Z'.

Απαντ. $f(t) = t^2$ $F(x) \doteq \int_0^x f(t)\,dt$

$$Z(x) = \int_0^{g(x)} t^2\,dt - \int_0^{h(x)} t^2\,dt = F(g(x)) - F(h(x))$$

παραγωγ. με

$$Z'(x) = F'(g(x))\cdot g'(x) - F'(h(x))\cdot h'(x) =$$
$$= f(g(x))\cdot g'(x) - f(h(x))\,h'(x) =$$
$$= (g(x))^2 g'(x) - (h(x))^2\,h'(x).$$

Ασκ 8

$f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής, $Z(x) = \int_1^x f(x/t)\,dt$

Νδο Z παραγωγ. και να υπολογ. Z'.

Απαντ.

Ολοκληρώνω $f(x/t) = f(\psi(t))$

Β' Θεωρ. Αντικ: $\int_a^b f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f(s)\,(\psi^{-1})'(s)\,ds.$

$$\psi(t) = x/t = s \Rightarrow t = x/s = \psi^{-1}(s) \Rightarrow (\psi^{-1})'(s) = -\frac{x}{s^2}.$$

$$Z(x) = \int_1^x f(\psi(t))\,dt = \int_{\psi(1)}^{\psi(x)} f(s)\cdot\left(-\frac{x}{s^2}\right)ds =$$

$$= \int_x^1 -x f(s)/s^2\,ds = x\cdot\int_1^x \underbrace{\frac{f(s)}{s^2}}_{g(s)}\,ds = x\int_1^x g(s)\,d(s) =$$

$$= x\,G(x) \text{ παραγ. με}$$

$$Z'(x) = G(x) + x\,G'(x) = \int_1^x f(s)/s^2\,ds + x g(x) =$$

$$= \int_1^x f(s)/s^2\,ds + \frac{f(x)}{x}.$$

Ασκ 9 $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Νδο $\forall x\in[0,a]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du .$$

Απόδ. Παίρνω τη διαφορά και παραγωγίζω (f συνεχής!) ως προς x:

$$\left(x\underbrace{\int_0^x f(u)\,du}_{F(x)} - \int_0^x \underbrace{uf(u)}_{g(u)}\,du - \int_0^x \underbrace{\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)}_{F(u)} du\right)' =$$

$$=\left(x\cdot F(x) - G(x) - \int_0^x F(u)\,du\right)' =$$

$$= F(x) + xf(x) - xf(x) - F(x) = 0$$

$\Rightarrow$ η συνάρτηση που παραγωγίσαμε είναι σταθ. $= c = ?$

Λογαριάζω στο 0:

$$c = \int_0^0 f(u)(0-u)\,du - \int_0^0\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du = 0-0=0 \Rightarrow$$

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du - \int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du = 0 \quad \forall x\in[0,a] \Rightarrow$$

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du = \int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du \quad \forall x\in[0,a].$$

Ασκ 10

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη, $P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Νδο

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)| \le \int_a^b |f'(x)|\,dx .$$

Ασκ 9 $f:[0,\alpha]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Νδο $\forall x\in[0,\alpha]$,

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du$$

Απόδ. Παίρνω τη διαφορά και παραγωγίζω (f συνεχής!) ως προς x.

$$\Big(x\underbrace{\int_0^x f(u)du}_{F(x)}-\int_0^x \underbrace{uf(u)}_{g(u)}du-\int_0^x\Big(\underbrace{\int_0^u f(t)dt}_{F(u)}\Big)du\Big)'=$$

$$=\left(x\cdot F(x)-G(x)-\int_0^x F(u)\,du\right)'=$$

$$=F(x)+xf(x)-xf(x)-F(x)=0$$

$\Rightarrow$ η συνάρτηση που παραγωγίσαμε είναι σταθ. $=c=?$

Λογαριάζω στο 0:

$$c=\int_0^0 f(u)(0-u)\,du-\int_0^0\left(\int_0^u f(t)dt\right)du=0-0=0\ \Rightarrow$$

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du-\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du=0\quad\forall x\in[0,\alpha]\Rightarrow$$

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\quad\forall x\in[0,\alpha].$$

Ασκ 10

Έστω $a,b\in\mathbb{R}$ με $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη
$P=\{x_0=a<x_1<\dots<x_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Νδο

$$\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\le\int_a^b|f'(x)|\,dx.$$

006

Απόδ. Από Β' ΘΘ του ΑΛ για f':

$$|f(x_{k+1})-f(x_k)| = \left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(x)dx\right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|dx \Rightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1})-f(x_k)| \leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(x)|dx = \int_a^b |f'(x)|dx.$$ ∎

Άσκ 11

$f: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$: ↑, συνεχώς παραγωγίσιμη & $f(0)=0$.

Ν.δ.ο. $\forall x>0$

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$

Απόδ.

Παραγωγίζω την διαφορά:

$$D'(x) = \left(\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x)\right)' =$$

$$= f(x) + f^{-1}(f(x))\cdot f'(x) - f(x) - xf'(x) = 0 \Rightarrow$$

$$D(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt - xf(x) = D(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = xf(x).$$ ∎

Άσκ 12

$f: [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη, $f(0)=0$. Ν.δ.ο. $\forall x\in[0,1]$:

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}$$