ΜΑΘΗΜΑ 17

ΘΕΜΕΛΙΩΔΗ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

Υπενθύμιση:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη $\Leftrightarrow$ $\exists\, f'(x)$, $\forall x\in(a,b)$ και στα a, b, $\exists$ οι πλευρικές παράγωγοι:

$$f'(a):=f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

$$f'(b):=f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. (Μέσης Τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού)
Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, $g\geq 0$;
$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη. Τότε $\exists\,\xi\in[a,b]$:

$$(*)\qquad \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Απόδ. $\left.\begin{array}{l} f \text{ συνεχής} \Rightarrow \text{ολοκληρώσιμη} \\ g \text{ ολοκληρώσιμη}\end{array}\right\} \to fg$ ολοκληρώσιμη

f συνεχής στο $[a,b]$ $\Rightarrow$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή:
$m=\min\{f(x): a\leq x\leq b\}$, $M=\max\{f(x): a\leq x\leq b\}$ $\Rightarrow$

$$\overset{g\geq 0}{\Rightarrow} mg(x)\leq f(x)g(x)\leq Mg(x)\quad \forall x\in[a,b]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\geq 0}\leq\int_a^b f(x)g(x)\,dx\leq M\underbrace{\int_a^b g(x)\,dx}_{\geq 0}$$

(1) $\int_a^b g(x)dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ και ⊛ ισχύει $\forall \xi$. $(: 0 = f(x)\cdot 0)$

(2) $\int_a^b g(x)dx > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

f συνεχής, από Θεώρημα Ενδιάμεσης Τιμής $\exists\, \xi \in [a,b]$:

$$f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot \int_a^b g(x)dx. \quad \blacksquare$$

Πόρισμα $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, \xi \in [a,b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),$$

όπ. $f(\xi)$ = μέση τιμή της f στο $[a,b]$.

Απόδ. Από το προηγ. θεωρ., για $g = 1$. $\blacksquare$

$\boxed{ΟΡΣ}$ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκλ. Τότε $f: [a,x] \to \mathbb{R}$ ολοκλ. $\forall x \in [a,b]$.

Αόριστο ολοκλήρωμα της f είναι η συνάρτηση

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$:

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt.$$

ΘΕΩΡ. 2 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ. $\Rightarrow$ το αόριστο ολοκλ. F είναι συνεχής. (Lipschitz - συνεχής).

Απόδ. f ολοκλ. $\Rightarrow$ φραγμ. εξ ορσ. $\Rightarrow \exists\, M>0:$
$|f(x)|\le M,\ \forall x\in[a,b]$.

Έστω $x<y\in[a,b]$. Τότε:

$$|F(y)-F(x)| = \left|\int_a^y f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \le$$

$$\le \int_x^y |f(t)|\,dt \le M|x-y|$$

Άρα F Lipschitz (με σταθερά M). ■

ΘΕΩΡ. 3 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκλ. Αν f συνεχής στο $x_0\in[a,b]$
$\Rightarrow$ F παραγωγίσιμη στο x_0 και
$$F'(x_0)=f(x_0).$$

Απόδ. Έστω $a<x_0<b$. Θέτουμε $\delta_1:=\min\{x_0-a,\ b-x_0\}$.
Αν $|h|<\delta_1$, τότε:

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt\right)-f(x_0)$$

$$=\frac{1}{h}\left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt-\int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt$$

Εστω $\varepsilon>0$. f συνεχής στο x_0, άρα $\exists\ 0<\delta<\delta_1$:

$$|x-x_0|<\delta \Longrightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Εστω $0<|h|<\delta$.

(α) Αν $0<h<\delta$, τότε: (Ισχύει και για $x_0=a$)

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|\,dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\,dt = \frac{1}{h}\cdot h\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

(β) Αν $-\delta<h<0$, τότε: (Ισχύει και για $x_0=b$)

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{x_0+h}^{x_0}\left(f(t)-f(x_0)\right)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}|f(t)-f(x_0)|\,dt$$

$$\leq \frac{1}{|h|}\int_{x_0+h}^{x_0}\varepsilon\,dt = \frac{1}{|h|}\cdot(-h)\cdot\varepsilon = \varepsilon.$$

Αρα

$$\exists \lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Αν $x_0=a$ $x_0=b$, εργαζόμαστε όπως στα (α) και (β), αντίστοιχα. ■

Άμεσο αποτέλεσμα του Θεωρ. 3 του προηγούμενου Μαθήματος 17, είναι το

ΘΕΩΡ. 1 (Α΄ Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)
$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow F:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη και $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in[a,b]$. ∎

Πόρισμα. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής $\Rightarrow \exists\, \xi\in[a,b]$:

$$F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

Απόδ. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ του Διαφ. Λογισμού στην F. ∎

ΟΡΣ. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Μια παράγουσα της f είναι μια $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $G'=f$.

ΘΕΩΡ. 2 Έστω $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, F το όρ. ολοκλήρωμα της f και G μια παράγουσα. Τότε, $\forall x\in[a,b]$:

$$G(x)=F(x)+G(a)=\int_a^x f(t)\,dt + G(a).$$

Ιδιαιτέρως:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b)-G(a)$$

Απόδ.

G παράγουσα $\Rightarrow \forall x\in[a,b]$: $G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\in[a,b]$: $(G-F)'(x)=0 \Rightarrow G-F=$ σταθ. $=c\in\mathbb{R}$.
Άρα $(G-F)(a)=G(a)-F(a)=G(a)-0=c \Rightarrow c=G(a)$, και $\forall x\in[a,b]$:

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt = G(x)-c = G(x)-G(a).$$ ∎

ΘΕΩΡ. 3 (Β' Θεμελ. Θεωρ. του Απειροστ. Λογισμού)

Έστω $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη. Αν η G' είναι ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b G'(x)\,dx = G(b)-G(a).$$

Απόδ. Έστω $P=\{a=x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b\}$ διαμ. του $[a,b]$.

ΘΜΤ στο $[x_k,x_{k+1}] \Rightarrow \exists\, \xi_k\in(x_k,x_{k+1})$:

$$G(x_{k+1})-G(x_k) = G'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k).$$

Θέτουμε:

$m_k=\inf\{G'(x): x\in[x_k,x_{k+1}]\}$, $M_k=\sup\{G'(x): x\in[x_k,x_{k+1}]\}$.

$$\Downarrow$$

$$m_k\le G'(\xi_k)\le M_k$$

$$\Downarrow$$

$$L(G',P)\le \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} G'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)}_{=\sum (G(x_{k+1})-G(x_k)) = G(b)-G(a).} \le U(G',P)$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_P L(G',P)\le G(b)-G(a)\le \inf U(G',P)$$

ίσα, αφού G' ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$

G' ολοκληρώσιμη $\Rightarrow$

$$\int_a^b G'(x)\,dx = G(b)-G(a) \blacksquare$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Το Β' ΘΘΑΛ δεν ισχύει αν G' δεν είναι φραγμένη!!