ΜΑΘΗΜΑ 19

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

1 $[a,b)$ $b \in \mathbb{R}$ ή $b = +\infty$.

$f : [a,b) \to \mathbb{R}$: ολοκλ. σε κάθε $[a,x]$, $a \le x < b$.

Αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt \in \mathbb{R}$$

λέμε ότι f ολοκληρώσιμη στο $[a,b)$ και

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)\,dt$$

Αν το όριο είναι $\pm\infty$, λέμε ότι το $\int_a^b f$ αποκλίνει στο $\pm\infty$.

Ομοίως για $(a,b]$.

Παραδ.

(α) $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$: $f(x) = \frac{1}{x^2}$. $\forall x > 1$:

$$\exists \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t}\Big|_1^x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{1} = 1 - \frac{1}{x}$$

Επίσης

$$\exists \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{+\infty}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 - 0 = 1.$$

Άρα

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt = 1.$$

(β) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1,+\infty)$. $\forall x > 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \ln t\Big|_1^x = \ln x - \ln 1 = \ln x \Rightarrow$$

$$\int_1^{+\infty} 1/t\,dt = \lim_{+\infty} \ln x = +\infty.$$ (αποκλίνει στο $+\infty$).

(γ) $f(x)=\ln x$, $x\in(0,1]$ (f όχι φραγμ.)

$\forall x\in(0,1)$:

$$\int_x^1 \ln t\,dt = t\ln t - t\Big|_x^1 = -1 - x\ln x + x \Rightarrow$$

$$\left[(t\ln t - t)' = \ln t + t\cdot\frac{1}{t} - 1 = \ln t\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{x\to0^+}\int_x^1 \ln t\,dt = \lim_{x\to0^+}(-1-x\ln x+x) = -1$$

$$\left(x\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \rightsquigarrow \frac{1/x}{-1/x^2} = -\frac{x^2}{x} = -x \to 0. \right)$$

(δ) $f:[0,1)\to\mathbb{R}$: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ (f όχι φραγμ.)

$x\in(0,1)$:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2\sqrt{1-t}\Big|_0^x = 2-2\sqrt{1-x} \Rightarrow$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \lim_{x\to1^-}\left(2-2\sqrt{1-x}\right) = 2.$$

(ε) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$. $\forall x>0$:

$$\int_0^x \sin x\,dx = \int_0^x (-\cos t)'\,dt = -\cos t\Big|_0^x = -\cos x+\cos 0 = 1-\cos x$$

$\nexists \lim_{x\to+\infty}(1-\cos x)$ άρα

Δεν υπάρχει το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_0^{+\infty}\sin x\,dx$.

2. $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $\quad b,a\in\mathbb{R}$ ή $a=-\infty$ ή $b=+\infty$.

Έστω f ολοκλ. σε καθε $[x,y]$. Παίρνουμε $c\in(a,b)$.

Αν $\exists \int_a^c f,\ \int_c^b f$ και $\exists$ και το άθροισμά τους, λέμε ότι:

$$\exists \int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Το άθροισμα δεν εξαρτάται από c!

$$a<x<c_1<c_2<y<b:$$

$$\int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{b} f = \lim_{x\to a^+}\int_x^{c_1} f + \lim_{y\to b^-}\int_{c_1}^{y} f =$$

$$= \lim_{x\to a^+}\int_x^{c_1} f + \lim_{y\to b^-}\left(\int_{c_1}^{c_2} f + \int_{c_2}^{y} f\right) =$$

$$= \lim_{x\to a^+}\int_x^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \lim_{y\to b^-}\int_{c_2}^{y} f =$$

$$= \lim_{x\to a^+}\left(\int_x^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f\right) + \lim_{y\to b^-}\int_{c_2}^{y} f =$$

$$= \lim_{x\to a^+}\int_x^{c_2} f + \lim_{y\to b^-}\int_{c_2}^{y} f = \int_a^{c_2} f + \int_{c_2}^{b} f$$

Παραδείγματα $(f:\mathbb{R}\to\mathbb{R})$

(α) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt=\lim_{+\infty}\int_0^x \frac{t}{t^2+1}\,dt=\lim_{+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{2}=+\infty.$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt=\lim_{-\infty}\int_x^0 \frac{t}{t^2+1}\,dt=\lim_{-\infty}\left[-\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]=-\infty.$$

Άρα $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}=+\infty+(-\infty)$, δεν ορίζεται!

Προσοχή!! $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,dt=0$!! $\forall x$

(β) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

$$\int_0^{\infty} f(t)\,dt=\lim_{+\infty}\int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt=\lim_{+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt=\lim_{-\infty}(\arctan 0-\arctan x)=-\lim_{x\to-\infty}\arctan x$$
$$=-(-\pi/2)=\pi/2.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt=\pi/2+\pi/2=\pi.$$

Παράρτημα: Αντίστροφες τριγωνομετρικών

(1) $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$ $\uparrow$ $\Rightarrow$ αντιστρέψιμη με

$(\sin)'(x) = \cos x \neq 0 \quad \forall\, x \in (-\pi/2, \pi/2) \overset{\text{ΘΑΑ}}{\Longrightarrow}$

$$[-\pi/2, \pi/2] \underset{(\sin)^{-1}}{\overset{\sin}{\rightleftarrows}} [-1, 1]$$

$\Rightarrow \sin^{-1} : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ παραγωγ. με

$$\underset{y = \sin x}{(\sin^{-1})'(y)} = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\sin^{-1}(y) =: \arcsin y.$$

(2) $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$

$\Rightarrow \tan \uparrow$, αντιστρ. με

$\tan^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$

Από ΘΑΑ $\tan^{-1}$ παραγωγ. με

$$(\tan^{-1})'(y) = \frac{1}{(\tan)'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$$

$y = \tan x$

$$\tan^{-1}(y) =: \arctan y.$$

ΕΡΩΤΗΣΗ: Πώς υπολογίζονται οι $\cos^{-1}$, $(\cos^{-1})'$, $\cot an^{-1}$, $(\cot an^{-1})'$; Ποιά είναι τα κατάλληλα π.ο.;

Κριτήριο ολοκληρώματος

ΘΕΩΡ. $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\downarrow$, $f \geq 0$

Θεωρούμε την ακολουθία (a_k) : $a_k = f(k)$. Τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ συγκλίνει} \iff \exists \int_1^{\infty} f(t)\,dt$$

Απόδ. f μονότονη $\Rightarrow$ f ολοκληρώσιμη σε κάθε $[k, k+1]$, με $k \in \mathbb{N}$.

$$a_{k+1} = f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq f(k) = a_k.$$

Επίσης $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt \uparrow$

($\Rightarrow$) Έστω ότι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε

$$\uparrow \int_1^x f(t)\,dt \leq \int_1^{[x]+1} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{[x]} \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{[x]} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad f \geq 0 \Rightarrow F \uparrow$$

Από $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ αύξουσα και φραγμ. $\Rightarrow \exists \lim_{x \to +\infty} F(x)$.

($\Leftarrow$) Έστω $\exists \int_1^{\infty} f(t)\,dt$.

$$S_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \leq f(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,dt =$$

$$= f(1) + \int_1^{n} f(t)\,dt \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(t)\,dt = M$$

Άρα $S_n \uparrow$ και φραγμένη. ■

Παραδείγματα:

(1) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$

[Με κρ. συμπ: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k \ln 2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$: αποκ.].

Η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$ αποκλίνει, διότι:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t\ln t} = \lim_{+\infty} \int_2^{x} \frac{dt}{t\ln t} = \lim_{+\infty} \int_2^{x} f(\phi(t))\cdot\phi'(t)\,dt \overset{A'\Theta A}{=}$$

$\phi(t) = \ln t$

$\phi'(t) = 1/t$

$f(s) = 1/s$

$f(\phi(t)) = \frac{1}{\phi(s)} = \frac{1}{\ln t}$

$$= \lim_{+\infty} \int_{\phi(2)}^{\phi(x)} f(s)\,ds$$

$$= \lim_{+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{ds}{s} =$$

$$= \lim_{+\infty} \left[\ln s \Big|_{\ln 2}^{\ln x} \right] =$$

$$= \lim_{+\infty} \left(\ln(\ln x) - \ln(\ln 2) \right) = +\infty.$$

(2) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$

[Με κρ. συμπ: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k(\ln 2^k)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k\ln 2)^2} =$

$= \frac{1}{(\ln 2)^2} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$: συγκλίνει].

Η $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2}$ συγκλίνει, διότι:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{+\infty} \int_2^{x} \frac{dt}{t(\ln t)^2} = \lim_{+\infty} \int_2^{x} f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

$\phi(t) = \ln t$

$\phi'(t) = 1/t$

$f(s) = \frac{1}{s^2}$

$f(\phi(t)) = \frac{1}{\phi(t)^2} = \frac{1}{(\ln t)^2}$

$$\overset{\text{Α'ΘΑ}}{=} \lim_{+\infty} \int_{\phi(2)}^{\phi(x)} f(s)ds =$$

$$= \lim_{+\infty} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{ds}{s^2} =$$

$$= \lim_{+\infty} \left[-\frac{1}{s} \Big|_{\ln 2}^{\ln x} \right] =$$

$$= \lim_{+\infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln x} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$