Αποδ

$|f(x)| = |f(x) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0)}}| =$ (Β' ΘΘ του Α.1)

$= \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leq \int_0^x |f'(t)|\cdot dt =$

$= \int_0^x |f'(t)|\cdot 1\, dt \leq$ (Cauchy-Schwarz)

$\leq \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} =$

$= \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2} \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_{\leq 1} \leq \left(\int_0^x |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$

Ασκ 13

$f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \neq 0$ $\forall x > 0$:

$(*) \qquad f(x)^2 = 2\int_0^x f(t)dt \qquad \forall x \geq 0.$

Νδο $f(x) = x$, $\forall x \geq 0$

Αποδ Η f είναι παραγωγίσιμη: f συνεχής, $f \neq 0 \Rightarrow$ διατηρεί πρόσημο.

$\int_0^x f(t)dt$ έχει πρόσημο της f, όμως $= \frac{1}{2} f(x)^2 \geq 0$. Άρα $f \geq 0$. $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$

$f(x) = \sqrt{2}\cdot\sqrt{\underbrace{\int_0^x f(t)dt}_{\geq 0}}$ παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$.

$\longrightarrow$ πίσω.

Άρα παραγωγίζοντας την $\circledast$, παίρνουμε

$\circledast \equiv f(x)^2 = 2F(x) \Rightarrow$

$2f(x)f'(x) = 2f(x) \underset{\forall x \neq 0}{\overset{f(x)\neq 0}{\Longrightarrow}} f'(x) = 1, \ \forall x \neq 0 \Rightarrow$

$$\underbrace{f(x) - f(0)}_{=0} = \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x 1\,dt = x - 0 = x \Rightarrow$$

$f(x) = x + f(0) = x + 0 = x.$

$\boxed{\text{Ασκ } 14}$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη. Νδο

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0.$$

Απόδ (ολοκλ. κατά μέρη):

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x)\cos(nx)\,dx \right| = \left| \int_a^b f(x) \left(\frac{\sin(nx)}{n} \right)' dx \right| =$$

$$= \left| \frac{f(b)\sin(nb) - f(a)\sin(na)}{n} - \frac{1}{n}\int_a^b f'(x)\sin(nx)\,dx \right| \leq$$

(f' συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow |f'(x)| \leq M$)

$$\leq \frac{|f(b)\sin(nb)|}{n} + \frac{|f(a)\sin(na)|}{n} + \frac{1}{n}\int_a^b M\,dx \leq$$

$$\leq \frac{|f(b)|}{n} + \frac{|f(a)|}{n} + \frac{M(b-a)}{n} \longrightarrow 0.$$

Ομοίως για το $\lim\limits_{+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx$. ∎

Άσκ. 15

Συγκλίνουν οι ακολουθίες?

$$a_n = \int_0^{\pi} \sin(nt)\,dt \quad , \quad b_n = \int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,dt$$

Απάντ.

Η (a_n) είναι ειδική περίπτωση της Άσκ. 14, για $f=1$ και $[a,b]=[0,\pi] \Rightarrow a_n \to 0$.

Διαφορετικά:

$$|a_n| = \left| \int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos(nt)}{n}\right)' dt \right| = \left| \frac{-\cos(n\pi)+\cos 0}{n} \right| \leq \frac{2}{n} \to 0.$$

Για την (b_n): Θέτω $s=\psi(t)=nt \Rightarrow \psi^{-1}(s)=t=s/n \Rightarrow$
$\Rightarrow (\psi^{-1})'(s) = 1/n$.

$$\int_0^{\pi} |\sin(nt)|\,dt = \int_0^{\pi} |\sin(\psi(t))|\,dt \underset{\text{Β΄ΘΑ}}{=}$$

$$= \int_{\psi(0)}^{\psi(\pi)} |\sin s| \cdot 1/n \, ds =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^{n\pi} |\sin s|\,ds =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin s|\,ds =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{n} \cdot n \cdot \left(-\cos t \Big|_0^{\pi}\right)$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 = -(-1)+1 = 2.$$

Ερώτηση

Ισχύει η ισοδυναμία;

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R-ολοκλ $\Rightarrow$ f συνεχής εκτός πεπερ. πλήθους σημείων.

Απαντ:

($\Leftarrow$) ναι.

($\Rightarrow$) όχι: ∃ ολοκλ. συνάρτηση με άπειρο πλήθος σημείων ασυνέχειας:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x=1/n \\ 0, & x\neq 1/n \end{cases}, \quad x\in[0,1].$$

Η f έχει άπειρο (αριθμ.) πλήθος σημείων ασυνέχειας, αλλά είναι R-ολοκλ:

Παρατηρούμε ότι $\forall\, b\in(0,1)$ η f είναι R-ολοκλ. στο $[b,1]$, αφού σε αυτό το διάστημα έχει πεπερ. σημεία ασυνέχειας. Άρα είναι R-ολοκλ. σε όλο το $[0,1]$.