Ερώτηση κατανόησης

f ολοκληρώσιμη, F το αόριστο ολοκλήρωμα.

$f\uparrow \Rightarrow F\uparrow$??

όχι: $f: [-3,-2] \to \mathbb{R}: f(x) = x$ συνεχής $\Rightarrow$ ολοκλ. και

$$F(x) = \int_{-3}^{x} f(t)\,dt = \int_{-3}^{x} t\,dt = \int_{-3}^{x} \left(\frac{t^2}{2}\right)' dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{-3}^{x} =$$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{9}{2}$ παραγ. με

$F'(x) = x \in [-3,-2] \Rightarrow F'(x) < 0 \Rightarrow F \downarrow$.

Ερώτηση κατανόησης

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής εκτός από πεπερ. πλήθος σημείων $\Rightarrow f$ ολοκληρώσιμη. φραγμ. (?)

Αντίστροφα?

- Το πρώτο και: $x_1, \ldots, x_n$ τα σημεία ασυνέχειας $\Rightarrow$
  $\Rightarrow f$ ολοκλ. στα $[a, x_1], \ldots, [x_k, x_{k+1}], \ldots, [x_n, b]$.
  $\Rightarrow f$ — " — " — $[a,b]$.

- Αντίστροφα όχι: $f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n} \\ 0, & \text{άλλως} \end{cases}$ στο $[0,1]$

είναι ολοκλ.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ασκ 1

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ όλοι Νδο $\exists\, \xi\in[a,b]$:

$$\int_a^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^{b} f(t)dt.$$

Απόδ Η $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ συνεχής $:[a,b]\to\mathbb{R}$

$0, F(b)\in Im(F) =$ διάστημα $\Rightarrow F(b)/2\in ImF$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in[a,b]: F(\xi)=F(b)/2=\int_a^{\xi} f(t)dt.$ (1)

$F(b)=F(\xi)+\int_{\xi}^{b} f(t)dt \Rightarrow$

$2F(\xi) = F(\xi)+\int_{\xi}^{b} f(t)dt \Rightarrow$

$F(\xi)=\int_a^{\xi} f(t)dt = \int_{\xi}^{b} f(t)dt$ ∎

Ασκ 4

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\int_0^x f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt$ $\forall x\in[0,1]$.
Νδο $f=0$.

Απόδ. $\forall x\in[0,1]$: $2\int_0^x f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = c \Rightarrow$

$\Rightarrow 2F(x)=c \Rightarrow F(x)=c/2 \Rightarrow F'(x)=0=f(x)$ ∎

Ασκ 2

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, $f\geq 0$, $\int_0^1 f(t)dt = 1$.

Νδο $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists$ διαμέριση $P_n=\{0=x_0<x_1<\dots<x_n=1\}$:

(όχι η "κανονική" !)

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \frac{1}{n} \quad \forall\ k=0,\dots,n-1$$

Απόδ. Θεωρώ το αορ. ολοκλ. $F(x):=\int_0^x f(t)dt$.

F συνεχής, $\uparrow$ $\Rightarrow$ $F(0)=0$ και $F(1)=1$ και

$$F([0,1])=[0,1] \ni k/n \quad \forall\ k=1,\dots,n-1.$$

$\Rightarrow \exists\ x_k\in[0,1]:\ F(x_k)=k/n$.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = F(x_{k+1})-F(x_k) = \frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}=\frac{1}{n} \quad \blacksquare$$

Ασκ 3

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Νδο $\exists\ s\in[0,1]$:

$$\int_0^1 f(x)x^2dx = \frac{f(s)}{3}.$$

Απόδ. Από ΘΜΤ του Ο.Λ για $g(x)=x^2\geq 0$, $\exists\ s\in[0,1]$:

$$\int_0^1 f(x)g(x)dx = f(s)\cdot\int_0^1 g(x)dx = f(s)\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}f(s).$$

Ασκ 5

$f,h:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$.

h συνεχής, f παραγωγίσιμη, $K(x)=\int_0^{f(x)} h(t)dt$.

Νδο $K'(x)=h(f(x))\cdot f'(x)$