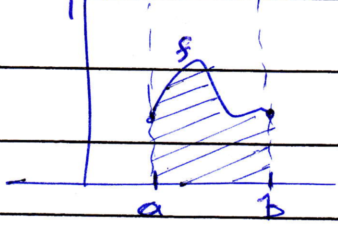
ΜΑΘΗΜΑ 13
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ RIEMANN
(κατά Darboux)

$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, $f \geq 0$.
Ζητάμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου:



ΟΡΣ (1) Διαμέριση του $[a,b]$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο
$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$
υποσύνολο του $[a,b]$, με
$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$
(2) πλάτος της διαμέρισης: $\|P\| := \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, x_n - x_{n-1}\}$.
(3) Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a,b]$, η P_2 λέγεται εκλέπτυνση της P_1, αν $P_1 \subseteq P_2$. Τότε η P_2 λέγεται λεπτότερη της P_1.
(4) Η κοινή εκλέπτυνση για δύο διαμερίσεις P_1, P_2 είναι η $P_1 \cup P_2$.

Έστω τώρα $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη και $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Θέτουμε:
$$m_k(f,P) := \inf\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\},$$
$$M_k(f,P) := \sup\{f(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}.$$

f φραγμένη $\Rightarrow f|_{[x_k, x_{k+1}]}$ φραγμένη, $\forall k \Rightarrow \exists\, m_k, M_k$.
Ακόμη, θέτουμε:

$$U(f,P) := \sum_{k=0}^{n-1} M_k \cdot (x_{k+1} - x_k)$$

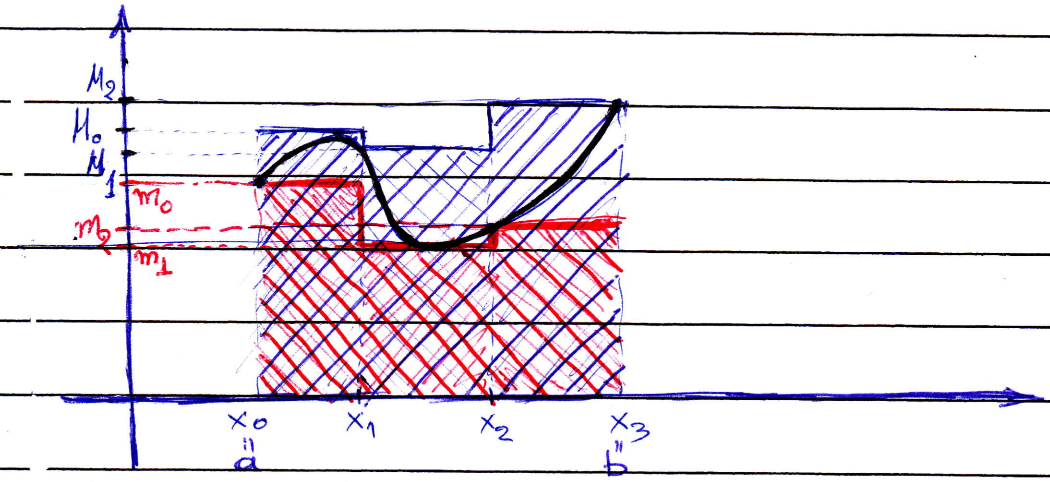
άνω άθροισμα της f ως προς P

$$L(f,P) := \sum_{k=0}^{n-1} m_k (x_{k+1} - x_k)$$

κάτω άθροισμα της f ως προς P

Προφανώς:

$$\boxed{L(f,P) \leq U(f,P)}$$



$L(f,P)$ προσεγγίζει το ζητούμενο εμβαδόν από κάτω και το
$U(f,P)$ — " — " — " — " — από πάνω.

ΛΗΜΜΑ.

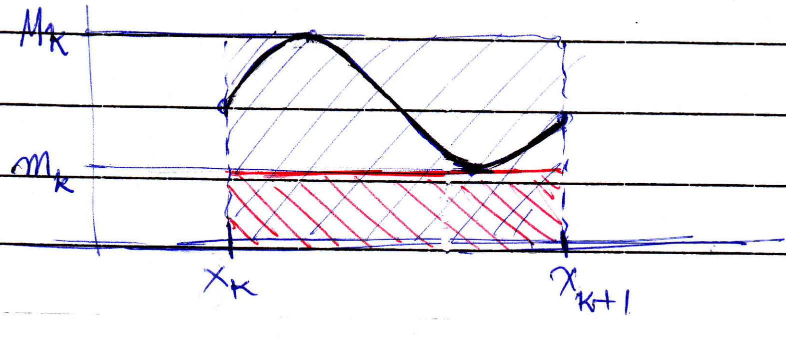
Εστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$, $y \in (x_k, x_{k+1})$ για κάποιο $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ και

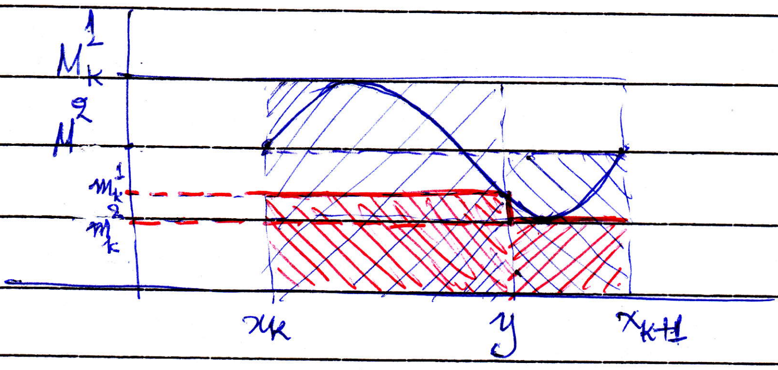
$$P_1 = P \cup \{y\} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < y < x_{k+1} < \cdots < x_n\}.$$

Τότε, για κάθε φραγμένη $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι:

$$L(\quad) \leq L(f,P_1) \leq U(f,P_1) \leq U(f,P).$$

Απόδ. Περιοριζόμαστε στο διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$:





$L(f,P)$ και $L(f,P_1)$ διαφοροποιούνται μόνο στο $[x_k, x_{k+1}]$.

[Παρατήρηση: $A \subset B \Rightarrow \inf B \leq \inf A$.

Πράγματι: $\inf B \leq y, \ \forall y \in B \Rightarrow$

$\inf B \leq x, \ \forall x \in A \Rightarrow$

$\inf B \leq \inf A$.]

Αν $m_k^1(f,P_1) = \inf\{f(x) : x \in [x_k, y]\}$ &

$m_k^2(f,P_1) = \inf\{f(x) : x \in [y, x_{k+1}]\}$ τότε

$m_k(f,P_1) \leq m_k^1(f,P_1), \ m_k^2(f,P_1)$

Άρα

$$L(f,P) = m_0(x_1-x_0) + m_1(x_2-x_1) + \dots + m_k(x_{k+1}-x_k) + \dots + m_{n-1}(x_n-x_{n-1}) =$$

$$= m_0(x_1-x_0) + \dots + m_k(y-x_k) + m_k(x_{k+1}-y) + \dots + m_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

$$\leq m_0(x_1-x_0) + \dots + m_k^1(y-x_k) + m_k^2(x_{k+1}-y) + \dots + m_{n-1}(x_n-x_{n-1})$$

$$= L(f,P_1) \leq U(f,P_1) \leq U(f,P) \quad \blacksquare$$

ΠΡΟΤ. P_1, P_2 διαμερίσεις του $[a,b]$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.

$$\Rightarrow \quad L(f,P_1) \leq U(f,P_2)$$

Απόδ. Θεωρούμε τις $P_1, P_2 \leadsto P = P_1 \cup P_2$ εκλέπτυνση των P_1, P_2.

P προέρχεται από P_1 (ή από P_2) με προσθήκη πεπερασμένου πλήθους σημείων. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο λήμμα πεπερ. φορές έχουμε

$$L(f,P_1) \leq L(f,P) \leq U(f,P) \leq U(f,P_2). \quad \blacksquare$$

Θεωρούμε τώρα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (για δεδομένη $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.)

$A(f) = \{L(f,P) : P$ διαμ. του $[a,b]\}$.

$B(f) = \{U(f,P) : \quad$ — " — $\quad\}$.

Τότε, $\forall\, \alpha \in A(f)$ & $\beta \in B(f)$: $\alpha \leq \beta \Rightarrow$

$$\boxed{\sup A(f) \leq \inf B(f).} \qquad \text{(γιατί;;)}$$

ΟΡΣ κάτω ολοκλήρωμα της f:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup A(f)$$

άνω ολοκλήρωμα της f:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf B(f)$$

$$\Rightarrow \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Αν $\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx \Rightarrow f$ Riemann ολοκληρώσιμη και το

$I = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx =$ ολοκλήρωμα Riemann, που συμβολίζεται με

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b f(x)\,dx.$$

ΘΕΩΡ. (Κριτήριο ολοκληρωσιμότητας / κρ. Riemann).

Έστω $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Τότε

f Riemann ολοκληρώσιμη $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists$ διαμέριση P_ε του $[a,b]$:

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

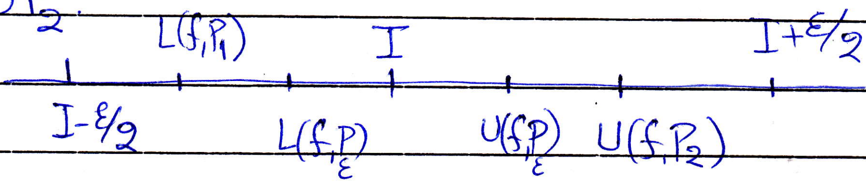
Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω f R.o., $I = \sup A(f) = \inf B(f)$. Τότε $\forall P$: διαμέριση του $[a,b]$:

$$L(f,P) \leq I \leq U(f,P).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε

$$\left.\begin{array}{l} \exists P_1: \ L(f,P_1) > I - \varepsilon/2 \\ \exists P_2: \ U(f,P_2) < I + \varepsilon/2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$P_\varepsilon := P_1 \cup P_2$



$$\Rightarrow I - \varepsilon/2 < L(f,P_1) \leq L(f,P_\varepsilon) \leq I \leq U(f,P_\varepsilon) \leq U(f,P_2) < I + \varepsilon/2.$$

$$\Rightarrow \underbrace{I + \varepsilon/2 - (I - \varepsilon/2)}_{=\varepsilon} > U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon)$$

($\Leftarrow$) Έστω $\varepsilon>0$ και P_ε:

$$U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf B(f) \leq U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon \leq \sup A(f)+\varepsilon \quad \forall \varepsilon$$

$$\Rightarrow \inf B(f) \leq \sup A(f).$$

Επειδή ισχύει πάντα

$$\inf B(f) \geq \sup A(f),$$

τελικά

$$\inf B(f) = \sup A(f) = I$$

και f Riemann ολοκληρώσιμη. ∎

$\boxed{\text{Ισοδ. διατύπωση}}$: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ φραγμένη.
Η f είναι R.o. $\Leftrightarrow$ $\exists$ ακολουθία $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ διαμερίσεων του $[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0.$$

Πράγματι:

f R.o $\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists P_\varepsilon : 0\leq U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon=1/n>0,\ n\in\mathbb{N},\ \exists P_n: 0\leq U(f,P_n)-L(f,P_n)<1/n$$

$$\Rightarrow \exists (P_n)_{n\in\mathbb{N}}: \lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0.$$

$\exists (P_n): \lim_{n\to\infty}(U(f,P_n)-L(f,P_n))=0.$
Έστω $\varepsilon>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n\geq n_0: 0\leq U(f,P_n)-L(f,P_n)<\varepsilon$
Θέτουμε $P_\varepsilon := P_{n_0}$.

Παρατήρηση. Συχνά η ακολουθία (P_n) με την ανωτέρω ιδιότητα είναι η $\left(P_n=\{x_k=a+k\frac{b-a}{n} : k=0,\dots,n\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ που οι P_n χωρίζουν το $[a,b]$ σε ίσα τμήματα.