ΜΑΘΗΜΑ 12

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ & ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

Στα επόμενα εξετάζουμε την ο.σ. μιας συνάρτησης, σε σχέση με το π.ο. της.

ΘΕΩΡ. 1 Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Τότε
f ο.σ. $\Longleftrightarrow$ f συνεχής.

Απόδ. ($\Leftarrow$) γνωστό, για κάθε π.ο.
($\Rightarrow$) Με άτοπο: Έστω f συνεχής, αλλά όχι ο.σ. Τότε:
$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] : |x_\delta - y_\delta| < \delta$, αλλά
$|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$.
Παίρνουμε διαδοχικά: $\delta_n = 1/n > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (x_n), (y_n)$ στο $[a,b]$: $|x_n - y_n| < 1/n$ αλλά
$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$.
Από BW $\Rightarrow \exists (x_{k_n}) : x_{k_n} \to x \in [a,b]$. Τότε
$|x_{k_n} - y_{k_n}| < 1/k_n \to 0 \Rightarrow x_{k_n} - y_{k_n} \to 0 \Rightarrow y_{k_n} \to x \overset{f}{\underset{\text{συνεχής}}{\Longrightarrow}}$
$\Rightarrow f(x_{k_n}) - f(y_{k_n}) \to f(x) - f(x) = 0$, άτοπο, γιατί
$|f(x_{k_n}) - f(y_{k_n})| \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

ΘΕΩΡ. 2 Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$ και $f: (a,b) \to \mathbb{R}$. Τότε:
f ο.σ. $\Longleftrightarrow$ f συνεχής και $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

Απόδ. ($\Rightarrow$) Έστω $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ ο.σ. Γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής. Θδο $\exists$ τα όρια. Έστω (x_n) με $x_n \in (a,b)$ και $x_n \to a$. Τότε (x_n) Cauchy $\overset{f}{\underset{\text{ο.σ}}{\Longrightarrow}}$
$(f(x_n))$ Cauchy $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \ell \in \mathbb{R}$.

Δείχνουμε ότι το ℓ δεν εξαρτάται από την (x_n): Έστω και κάποια (y_n) στο (a,b): $y_n \to a \Rightarrow x_n - y_n \to 0 \xRightarrow[\text{ο.σ.}]{f}$
$\Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0 \Rightarrow f(y_n) \to \ell$.

Από την ΑΜ για τα όρια, $\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Όμοια δείχνουμε ότι $\exists \lim\limits_{x\to b^-} f(x) \in \mathbb{R}$.

$(\Leftarrow)$ Θέτουμε $g(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$, $g(b) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. Τότε η $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x)$ $\forall x \in (a,b)$ είναι συνεχής $\Rightarrow g$ ο.σ. $\Rightarrow f = g|_{(a,b)}$ ο.σ. ∎

Παρατηρούμε ότι στο $(\Leftarrow)$ της προηγούμενης απόδ. έχει χρησιμοποιηθεί το (προφανές)

ΛΗΜΜΑ. Αν $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$ ο.σ. $\Rightarrow f|_B$ ο.σ.

ΠΡΟΤΑΣΗ*.
Έστω $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής: $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow f$ ο.σ.

Απόδ. Έστω $\varepsilon > 0$.
(1) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists M > 0, a: \forall x \geq M: |f(x) - \ell| < \varepsilon/3$.

(2) Στο $[a,M]$ η f είναι συνεχής σε κλειστό $\Rightarrow f|_{[a,M]}$ ο.σ.
$\Rightarrow \exists \delta > 0: \forall x,y \in [a,M]$ με $|x-y| < \delta: |f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$.

Έστω $x,y \in [a,+\infty)$ με $|x-y| < \delta$. Τότε:

(i) $x,y \leq M \Rightarrow x,y \in [a,M]$ με $|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon/3 < \varepsilon$

(ii) $x,y \geq M \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-\ell| + |\ell - f(y)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon.$

(iii) $x < M < y \Rightarrow |x-M| < |x-y| < \delta \underset{x,M \in [\alpha,M]}{\overset{(2)}{\Longrightarrow}} |f(x)-f(M)| < \varepsilon/3$

και

$|f(y)-f(M)| \leq |f(y)-\ell| + |f(M)-\ell| \underset{(1)}{<} 2\varepsilon/3$

$\Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq |f(x)-f(M)| + |f(M)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$ ∎

<u>Παρατήρηση.</u> Στην τελευταία πρόταση <u>δεν</u> ισχύει το αντίστροφο. Π.χ.:

(1) Η $f(x) = x$, $x \in [0,+\infty)$ είναι συνεχής, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \notin \mathbb{R}$, αλλά είναι ο.σ.

(2) Η $g(x) = \sin x$, $x \in [0,+\infty)$ ορίζεται σε διάστημα, είναι παραγωγίσιμη με $|g'(x)| = |\cos x| \leq 1 \Rightarrow g$ Lipschitz $\Rightarrow g$ ο.σ., αλλά $\nexists \lim_{x\to+\infty} g(x)$

<u>Εφαρμογή:</u> $f: [0,+\infty) \to \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{x}$. Είναι ο.σ.;

(1) Η $f: [0,1] \to \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{x}$ είναι ο.σ., σαν συνεχής σε κλειστό. [Σημειώνουμε ότι στο $(0,1)$ δεν έχει φραγμένη παράγωγο και δεν είναι Lipschitz-συνεχής.

Για το 2ο, αν $\exists M>0: |f(x)-f(y)| \leq M|x-y| \quad \forall x,y \in [0,1]$

$\Rightarrow |f(1/n^2) - f(0)| < M|1/n^2 - 0| \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1/n < M \, 1/n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο.]

(2) Η $f: [1,+\infty) \to \mathbb{R}: f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο: $|f'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq 1/2$, $\forall x \in [1,+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Lipsch-συνεχής $\Rightarrow$ ο.σ.

(3) Στο $[0,+\infty)$: Έστω $\varepsilon>0$. Τότε:

$\exists\, \delta_1>0$: $x,y\in[0,1]$ και $|x-y|<\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

$\exists\, \delta_2>0$: $x,y\in[1,+\infty)$ και $|x-y|<\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$.

Θέτω $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2\}>0$ και έστω $x,y\in[0,+\infty)$ με $|x-y|<\delta$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) $0\le x,y\le 1$, $|x-y|<\delta\le\delta_1 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$.

(ii) $1\le x,y$, $|x-y|<\delta\le\delta_2 \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2<\varepsilon$.

(iii) $0\le x<1<y$, $|x-y|<\delta \Rightarrow |x-1|<\delta$ και $|1-y|<\delta \Rightarrow$
$|f(x)-f(y)|\le|f(x)-f(1)|+|f(y)-f(1)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$.

Προσοχή! Η προηγούμενη διαδικασία μπορεί να εφαρμοστεί μόνο σε ενώσεις από πεπερασμένο πλήθος διαστημάτων αλλιώς μπορεί να μην υπάρχει το $\delta=\min\{\delta_n : n\in\mathbb{N}\}$.

Υπενθ: $f: I\to\mathbb{R}$ παραγ. με $|f'|$ φραγμ. $\underset{(1)}{\Rightarrow}$ f Lipsch $\underset{(2)}{\Rightarrow}$ f o.σ. $\underset{(3)}{\Rightarrow}$ f συνεχής.

(1) $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$: όχι: παραγωγίσιμη
ναι: Lipsch, και o.σ., και συνεχής.

Άρα η συνεπαγωγή (1) δεν αντιστρέφεται.

(2) $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$: όχι: παραγ. με φραγμ. f', Lipsch.
ναι: o.σ. και συνεχής

Άρα η (2) δεν αντιστρέφεται.

(3) $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$: όχι παραγ. με φραγμ. f', Lipsch, o.σ.
ναι: συνεχής

Άρα η (3) δεν αντιστρέφεται.