ΜΑΘΗΜΑ 10

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Υπενθύμιση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής στο x_0 $\iff$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Ας δούμε δύο παραδείγματα:

(1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2x + 1$.
Δίνεται $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Πόσο είναι το αντίστοιχο δ;

Η υπόθεση $|x - x_0| < \delta$ πρέπει να εξασφαλίζει το συμπέρασμα $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Ας αρχίσουμε από το τελευταίο:

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \iff |2x + 1 - 2x_0 - 1| < \varepsilon$$
$$\iff |x - x_0| < \varepsilon/2$$

Άρα παίρνοντας $\delta := \varepsilon/2 > 0$ έχουμε

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow 2|x - x_0| = |2x - 2x_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Παρατηρούμε ότι το $\delta = \varepsilon/2$ δεν εξαρτάται από το x_0

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$.
Δίνεται $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Μπορεί τώρα να βρεθεί $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, που να μην εξαρτάται από το x_0;

Η απάντηση είναι ΟΧΙ!
Έστω (προς άτοπο) ότι υπάρχει τέτοιο δ. Αυτό σημαίνει ότι η συνεπαγωγή

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ισχύει για τα ίδια ε, δ, ακόμη κι αν μεταβάλλουμε το $x_0 \in \mathbb{R}$ (και μαζί του το $x \in \mathbb{R}$).

Άρα $\forall x_0 > 0$ και για $x = x_0 + \delta/2$, ισχύει:

$$\left|(x_0+\delta/2)^2 - x_0^2\right| = \left|x_0\delta + \frac{\delta^2}{4}\right| = x_0\delta + \frac{\delta^2}{4} < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta x_0 < \delta x_0 + \delta^2/4 < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0 < \varepsilon/\delta ,$$

δηλ. οι πραγματικοί φράσσονται δεξιά από το ε/δ, άτοπο.

<u>ΟΡΣ.1</u> Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$. Η f λέγεται <u>ομοιόμορφα συνεχής</u>, αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$x, y \in A$ με $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

<u>Παραδείγματα</u>

(1) Η $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in \mathbb{R}$, είναι ο.σ.

(2) Η $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, <u>δεν</u> είναι ο.σ.

(3) Έστω $A = [-M, M]$, $M > 0$, και $g(x) = x^2$, $x \in A$.
Η g <u>είναι</u> ο.σ.:

Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $\delta := \varepsilon/2M$. Τότε:

$x, y \in A$ με $|x-y| < \varepsilon/2M \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x^2 - y^2| = |x-y| \cdot |x+y| \leq |x-y| \cdot (|x|+|y|) <$$

$$< \delta \cdot 2M = \varepsilon.$$

<u>Παρατήρηση.</u> Στο 3ο Παράδειγμα βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη συνέχεια μιας f μπορεί να εξαρτάται από το πεδίο ορισμού της.

<u>ΟρΣ. 2.</u> Μια $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>Lipschitz συνεχής</u>, αν $\exists M > 0$: $\forall x, y \in A$

$$|f(x) - f(y)| \leq M |x-y|.$$

Πώς συνδέονται οι έννοιες: συνέχεια – ομοιόμορφη συνέχεια – Lipschitz συνέχεια;

ΠΡΟΤΑΣΗ 1. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ ο.σ $\Rightarrow$ f συνεχής.

Απόδ. Προφανής!

ΠΡΟΤΑΣΗ 2. Αν $f: A \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz - συνεχής $\Rightarrow$ f ο.σ.

Απόδ. Έστω $M>0$ με $|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$, $\forall x,y \in A$.
Έστω και $\varepsilon>0$, θέτουμε $\delta := \varepsilon/M$. Τότε:
$|x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq M|x-y| < M\cdot\delta = \varepsilon$. ∎

Υπό ορισμένες προϋποθέσεις, η ύπαρξη φραγμένης παραγώγου εξασφαλίζει την Lipschitz συνέχεια:

ΠΡΟΤΑΣΗ 3. Έστω I διάστημα, $f: I \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο. Τότε η f είναι Lipschitz - συν.

Απόδ. Έστω $M>0$ με $|f'(x)| \leq M$, $\forall x \in I$.
Θεωρούμε τυχαία $x, y \in I$ με $x<y$. Από το ΘΜΤ, $\exists\, \xi \in (x,y)$:
$|f(x)-f(y)| = |f'(\xi)(x-y)| \leq M|x-y|$. ∎

Παρατηρούμε ότι το φράγμα M της $f'(x)$ είναι και η σταθερά της συνθήκης Lipschitz.

Συνοψίζουμε:

$$\boxed{\begin{array}{c} \exists \text{ φραγμένη } f' \text{ σε διάστημα} \\ \Downarrow (1) \\ f \text{ Lips.- συνεχής} \\ \Downarrow (2) \\ f \text{ o.σ.} \\ \Downarrow (3) \\ f \text{ συνεχής.} \end{array}}$$

Ισχύουν τα αντίστροφα των προηγούμενων συνεπαγωγών;

Για την (3): δεν ισχύει, π.χ. η $f(x)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής, αλλά όχι ο.σ. Άρα

$$f \text{ συνεχής} \not\Rightarrow f \text{ o.σ.}$$

Για τις αντίστροφες των (1) και (2) θα συζητήσουμε αργότερα.

ΟΡΙΣ. 3 Μια Lipschitz - συνεχής συνάρτηση $f: A\to\mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz $M\geq 0$ λέγεται συστολή, αν $0\leq M<1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (σταθερού σημείου)
Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συστολή. Τότε $\exists!\, y\in\mathbb{R}$ με $f(y)=y$.

Αποδ. Από υπόθ. $\exists\ 0 \leq M < 1 : \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x)-f(y)| \leq M|x-y|$$

Επιλέγουμε τυχαίο $x_1 \in \mathbb{R}$ και θεωρούμε την αναδρομική ακολουθία $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| \leq M|x_n - x_{n-1}| \quad \forall\, n \geq 2.$$

Οπότε:

$$|x_3-x_2| \leq M|x_2-x_1|$$

$$|x_4-x_3| \leq M|x_3-x_2| \leq M^2|x_2-x_1|$$

$$\vdots$$

$$|x_{n+1}-x_n| \leq M|x_n-x_{n-1}| \leq M^{n-1}|x_2-x_1|, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Επομένως, $\forall\ n > m$:

$$|x_n-x_m| \leq |x_n-x_{n-1}| + |x_{n-1}-x_{n-2}| + \dots + |x_{m+1}-x_m|$$

$$\leq (M^{n-2}+M^{n-3}+\dots+M^{m-1})|x_2-x_1|$$

$$= M^{m-1}(M^{n-m-1}+M^{n-m-2}+\dots+1)|x_2-x_1|$$

$$= M^{m-1} \cdot \frac{1-M^{n-m}}{1-M} \cdot |x_2-x_1| \leq$$

$$\leq \frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2-x_1| \longrightarrow 0$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την σύγκλιση $\frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2-x_1| \to 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$:

$\forall\ m \geq n_0 : \ \frac{M^{m-1}}{1-M} \cdot |x_2-x_1| < \varepsilon \implies$

$\forall\ n > m \geq n_0 : \ |x_n - x_m| \leq \frac{M^{m-1}}{1-M}|x_2-x_1| < \varepsilon$,

δηλ. η (x_n) είναι Cauchy, άρα $\exists!\, y \in \mathbb{R}$ με $f(x_n) = y$.

Από την συνέχεια της f: $f(f(x_n)) \to f(y) \Rightarrow f(x_{n+1}) \to f(y)$

Όμως $f(x_{n+1}) \to y$, άρα $f(y) = y$.

Το y είναι μοναδικό: αν $\exists\, z \in \mathbb{R}$ με $f(z) = z$, τότε

$$\underbrace{|f(y)-f(z)|}_{=|y-z|} \leq M|y-z| < |y-z|,$$ άτοπο. ∎