ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ασκ. 3 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ συνεχής, παραγωγίσιμη στο (a,b).
ΝΔο f Lipschitz-συνεχής $\Leftrightarrow$ f' φραγμένη.

Απόδ. $(\Rightarrow)$ Έστω f Lipschitz-συνεχής και $M>0$ με
$$|f(x)-f(y)|\le M|x-y| \quad \forall\, x,y\in[a,b].$$
Έστω και $x_0\in(a,b)$, $x\neq x_0 \Rightarrow$
$$\Rightarrow \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}\le M \Rightarrow |f'(x_0)|=\lim_{x\to x_0}\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\le M.$$
$(\Leftarrow)$ Βλ. απόδειξη της Πρότασης 3, Μαθ. 10.

Ασκ 5. Εξετάστε αν είναι Lipschitz-συνεχείς οι:
(i) $f:[0,1]\to\mathbb{R}: f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, αν $x\neq 0$ & $f(0)=0$.
(ii) $g:[0,1]\to\mathbb{R}: g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$, αν $x\neq 0$ & $g(0)=0$.

Απόδ.
Και οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$. Εφαρμόζεται η Ασκ. 3:
(i) $$f'(x)=\sin\frac{1}{x}+x\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$$
$$=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$
που δεν είναι φραγμένη: $\forall\, M>0\ \exists\, n\in\mathbb{N}: 2n\pi>M$,
$\frac{1}{2n\pi}\in(0,1)$, οπότε:
$$\left|f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right)\right|=|\sin(2n\pi)-2n\pi\cdot\cos(2n\pi)|=$$
$$=|0-2n\pi\cdot 1|=2n\pi>M.$$
Άρα η f δεν είναι Lipschitz-συνεχής.

(ii) $g'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$
$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$,

οπότε

$$|g'(x)| \leq 2\cdot 1\cdot 1 + 1 = 3$$

Άρα η g είναι Lipschitz-συνεχής.

Ασκ.

Εξετάστε την ομοιόμορφη συνέχεια των:

(i) $f: [2,+\infty) \to \mathbb{R}: f(x) = 1/x$.

Απάντ: Η f είναι παραγωγίσιμη με φραγμένη παράγωγο:

$$|f'(x)| = \left|-\frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{4}, \quad \forall x \geq 2.$$

Άρα είναι Lip-συν. $\Rightarrow$ ο.σ.

(ii) $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}: f(x) = \sin\frac{1}{x}$.

Απάντ. 1 Αν f ο.σ. $\Rightarrow$ στέλνει ακολ. Cauchy σε Cauchy.
Η $\left(x_n = \frac{2}{n\pi}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι στο $(0,+\infty)$, $x_n \to 0$
άρα είναι Cauchy αλλά η $\left(y_n = f(x_n) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)$ δεν είναι Cauchy. Πράγματι, αν ήταν Cauchy, θα ήταν συγκλίνουσα. Όμως

$$y_{2k} = f(x_{2k}) = \sin\frac{2k\pi}{2} = \sin(k\pi) = 0 \to 0$$

$$y_{4k+1} = f(x_{4k+1}) = \sin\frac{4k\pi+\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \to 1.$$

Άρα η $(f(x_n))$ δεν είναι Cauchy και η f δεν είναι ο.σ.

Απαντ. 2 Δεν είναι ο.σ. αφού $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

(iii) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f(x)=x\sin x$

Απάντ. Η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\sin x + x\cos x$, άρα η $f'(x)$ δεν είναι φραγμένη ($\Rightarrow$ δεν είναι Lipsch $\not\Rightarrow$ δεν είναι ο.σ.).

Θέτουμε $x_n = 2n\pi$ και $y_n = 2n\pi+\frac{1}{n}$. Τότε $y_n - x_n = \frac{1}{n}\to 0$, αλλά

$$f(y_n)-f(x_n) = \left(2n\pi+\tfrac{1}{n}\right)\sin\left(2n\pi+\tfrac{1}{n}\right) - \underbrace{2n\pi\sin 2n\pi}_{0} =$$

$$= \left(2n\pi+\tfrac{1}{n}\right)\sin\tfrac{1}{n} =$$

$$= 2\pi\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} + \frac{1}{n}\sin\frac{1}{n} \longrightarrow 2\pi\cdot 1 + 0\cdot 0 = 2\pi \neq 0.$$

Άρα η f δεν είναι ο.σ.

Ασκ 19

Αν f ο.σ. στο $(0,1) \Rightarrow \exists \lim f(1/n)$

Απόδ.

$(1/n)$ είναι βασική στο $(0,1) \Rightarrow (f(1/n))$ βασική $\Rightarrow$ $\Rightarrow (f(1/n))$ συγκλίνουσα.

Ασκ 21

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: $f(x)=x$ για $x>0$ και $f(x)=2x$, αν $x\leq 0$, είναι ο.σ.

Απόδ

Αν $x,y \leq 0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |2x-2y| \leq 2|x-y|$.

Αν $x,y > 0 \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |x-y| \leq 2|x-y|$.

Αν $x \leq 0 < y \Rightarrow |f(x)-f(y)| = y-2x \leq 2y-2x =$
$= 2|x-y|$.

Άρα η f είναι Lipschitz με σταθερά 2 ⇒ f ο.σ.

Ασκ. 23

ΝΔο η $f:(0,1)\cup(1,2) \to \mathbb{R}$ με $f(x)=0$ για $x\in(0,1)$ και $f(x)=1$, για $x\in(1,2)$ είναι συνεχής αλλά όχι ο.σ.

Απόδ.

Έστω (x_n) στο $(0,1)\cup(1,2)$ με $x_n \to x_0 \in (0,1)$.
Θέτουμε $\varepsilon = \min\{1-x_0, x_0\} > 0$. Αφού $x_n \to x_0$,
$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : x_n \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon) \subseteq (0,1) \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(x_n) = 0 \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow f(x_n) \to 0 = f(x_0)$.
Ανάλογα, αν $x_n \to x_0 \in (1,2) \Rightarrow f(x_n) \to 1 = f(x_0)$.
Άρα η f είναι συνεχής.

Όμως δεν είναι ο.σ.: Θεωρούμε τις ακολουθίες $x_n = 1-\frac{1}{n}$ και $y_n = 1+\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Τότε
$x_n, y_n \in (0,1)\cup(1,2)$, $y_n - x_n = \frac{2}{n} \to 0$ αλλά
$f(y_n)-f(x_n) = 1-0 = 1 \not\to 0$.