Ασκ. 22

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, όπου:

(α) $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

Παρατηρούμε ότι:

$S_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + \dots + (\sqrt{2} - \sqrt{1}) = \sqrt{n+1} - 1 \to +\infty$.

Άρα η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$.

(β) $a_k = \sqrt{1+k^2} - k$

Παρατηρούμε ότι $a_k = \dfrac{1}{k+\sqrt{1+k^2}}$. Θεωρούμε την $b_k = \dfrac{1}{k}$ και το πηλίκο

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k}{k+\sqrt{1+k^2}} \longrightarrow \frac{1}{2} > 0.$$ Επειδή η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ αποκλίνει,

από το κριτήριο ισοδύναμης συμπεριφοράς, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(γ) $a_k = \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k}$

Παρατηρούμε ότι $a_k = \dfrac{1}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$. Θεωρούμε την $b_k = \dfrac{1}{k^{3/2}}$.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{k^{3/2}}{k(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{1}{\sqrt{1+1/k} + 1} \longrightarrow \frac{1}{2} \in \mathbb{R}.$$

Αφού η $\sum b_k$ συγκλίνει, από το οριακό κρ. σύγκρισης (ή και το κρ. ισοδ. συμπεριφοράς), η $\sum a_k$ συγκλίνει.

(δ) $a_k = (\sqrt[k]{k} - 1)^k$

κρ. ρίζας: $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{k} - 1 \to 0 \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει.

Ασκ. 23

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση τις σειρές:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+\sqrt{k}}{2k^3-1}$

Θέτουμε $b_k = \frac{1}{k^2}$ και έχουμε $\frac{a_k}{b_k} \to \frac{1}{2}$. Αφού η $\sum b_k$ συγκλίνει, από το οριακό κρ. σύγκρισης η $\sum a_k$ συγκλίνει.

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)$.

Θέτουμε $\theta_k = \sqrt[k]{k} - 1 \Rightarrow \theta_k + 1 = \sqrt[k]{k} \Rightarrow k = (\theta_k + 1)^k$.
Τότε $\forall k \geq 3$:
$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < 3 \leq k = (1 + \theta_k)^k \Rightarrow \frac{1}{k} < \theta_k$.
Από το κριτήριο σύγκρισης, αφού η $\sum 1/k$ αποκλίνει, και η $\sum \theta_k$ αποκλίνει.

(δ) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

Κριτήριο λόγου: $\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \frac{(k+1)!}{k!} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \frac{1}{k+1} =$

$= \left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}\right)^k \to \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει.

Ασκ. 24

Εξετάστε ως προς την σύγκλιση:

(α) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k^2}$

Κριτήριο ρίζας: $\sqrt[k]{(1+1/k)^{-k^2}} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \longrightarrow \frac{1}{e}<1.$

$\Rightarrow$ η σειρά συγκλίνει

(β) $\sum_{k=1}^{\infty} p^k k^p \quad (p>0)$

Κρ. λόγου: $\frac{p^{k+1}(k+1)^p}{p^k k^p} = p\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)^p \longrightarrow p\cdot(1+0)^p = p.$

Για $p>1$ η σειρά αποκλίνει.
Για $0<p<1$ η σειρά συγκλίνει.
Για $p=1$ προκύπτει η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} k$ που αποκλίνει στο $+\infty$.

(η) $\sum_{k=1}^{\infty} k^p\left(\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)$

Παρατηρούμε ότι για $k\geq 2$:

$a_k = k^p\left[\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)+\left(\sqrt{k-1}-\sqrt{k}\right)\right]=$

$= k^p\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}\right)=$

$= k^p\,\frac{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}-\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k-1}+\sqrt{k}\right)} = -k^p\,\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1}}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}$

$= -k^p\,\frac{2}{\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k-1}+\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1}\right)}$

Γνωρίζουμε ότι αν (s_n) είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, τότε $s_n \to s \in \mathbb{R} \iff -s_n \to -s \in \mathbb{R}$

Όμως η $(-s_n)$ είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)$. Άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\iff \sum_{k=1}^{\infty}(-a_k)$ συγκλίνει.

Θεωρώ την $b_k = \dfrac{2k^p}{k^{3/2}}$. Τότε

$$\frac{-a_k}{b_k} = \frac{2k^p}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}+\sqrt{k-1})} \cdot \frac{k\sqrt{k}}{2k^p} \longrightarrow \frac{1}{8} > 0$$

Από το κρ. ισοδ. συμπεριφοράς, η σειρά $\sum a_k$ συγκλίνει $\iff$ η $\sum b_k$ συγκλίνει. $\iff 3/2 - p > 1 \iff p < 1/2$.

Ασκ. 26

Ορίζουμε (a_k): $k = m^2,\ m \in \mathbb{N} \Rightarrow a_k = \dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{m^2}$.

$k \neq m^2 \Rightarrow a_k = \dfrac{1}{k^2}$.

Εξετάστε αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει

Απαντ. $\forall k \in \mathbb{N}: a_k > 0 \Rightarrow (s_n)\uparrow$. Άρα η $\sum a_k$ συγκλίνει $\iff (s_n)$ άνω φραγμένη.

$$s_{n^2} = \sum_{k=1}^{n^2} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{k^2} + \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq m^2}}^{n^2-1} a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=2 \\ k\neq m}}^{n^2-1} \frac{1}{k^2} <$$

$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{k^2} < 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 2M$$

Επειδή $\forall n \in \mathbb{N}: n \leq n^2 \Rightarrow s_n \leq s_{n^2} < 2M$, άρα φραγμένη.

Ασκ. 29

Έστω $(a_k)\downarrow$, $a_k>0$, $\forall k\in\mathbb{N}$. Ν.δ.ο. αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow k a_k \to 0$.

Αποδ.

Αφού $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, η αντίστοιχη (S_n) είναι Cauchy.
Έστω $\varepsilon>0$. Επειδή (S_n) Cauchy, για το $\varepsilon/2>0$:
$\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall n>m\geq n_0: |S_n-S_m|<\varepsilon/2$.
Παίρνουμε $m=n_0$ και $n\geq 2n_0$. Τότε:

$$2n_0\leq n \Leftrightarrow 0\leq n-2n_0 \Leftrightarrow n\leq 2n-2n_0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{n}{2}\leq n-n_0$$

και:

$$\frac{na_n}{2}\leq (n-n_0)a_n\leq \underbrace{a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+\dots+a_n}_{=S_n-S_{n_0}}<\varepsilon/2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow na_n<\varepsilon,\quad \forall n\geq 2n_0.$$

Ασκ. 30

Έστω $a_k>0$, $\forall k\in\mathbb{N}$, και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Τότε οι $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{1+a_k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνουν.

Αποδ. (α) $a_k\to 0 \Rightarrow$ για $\varepsilon=1>0$ $\exists n_0\in\mathbb{N}: \forall k\geq n_0$:
$0<a_k<1 \Rightarrow 0<a_k^2<a_k \Rightarrow \sum a_k^2$ συγκλίνει
(κρ. σύγκρισης).

(β) $0<\frac{a_k}{1+a_k}<a_k \Rightarrow \sum\frac{a_k}{1+a_k}$ συγκλίνει (από κρ. σύγκρισης)

(γ) ομοίως: $0<\frac{a_k^2}{1+a_k^2}<a_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2}{1+a_k^2}$ συγκλίνει
(από (α)+(κρ. σύγκρισης)).