ΜΑΘΗΜΑ 5

ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΟΡΣ. Εστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad , \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δηλαδή:

$$s_1 = a_1$$

$$s_2 = a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (*)$$

$$\vdots$$

Ονομάζουμε σειρά με k-οστό όρο τον a_k το σύμβολο

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k ,$$

n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ τον n-οστό όρο της ακολουθίας (s_n), δηλ. τον $(*)$, και ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ την (s_n).

Αν η (s_n) συγκλίνει σε $s \in \mathbb{R}$, γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

και λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο s ή ότι το s είναι το άθροισμα της σειράς.

Αν $s_n \to +\infty$ (ή $s_n \to -\infty$) λέμε ότι η σειρά αποκλίνει στο $+\infty$ (ή αποκλίνει στο $-\infty$).

Η εύρεση ορίου μιας σειράς δεν είναι πάντα δυνατή. Θα προσπαθήσουμε να αναπτύξουμε κριτήρια για το αν συγκλίνει ή όχι μια σειρά.

ΒΑΣΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Πρόταση 1. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$ και $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$ (με $s, t \in \mathbb{R}$) και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, τότε η σειρά με k-οστό όρο τον γραμμ. συνδυασμό $\lambda a_k + \mu b_k$, δηλ. η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ συγκλίνει στο $\lambda s + \mu t$, δηλ.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda s + \mu t = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Απόδ. Θέτουμε:

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + \dots + b_n$$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) =$$

$$= (\lambda a_1 + \mu b_1) + (\lambda a_2 + \mu b_2) + \dots + (\lambda a_n + \mu b_n) =$$

$$= \lambda(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + \mu(b_1 + b_2 + \dots + b_n)$$

$$= \lambda s_n + \mu t_n$$

Αφού $s_n \to s$ και $t_n \to t \Rightarrow u_n \to \lambda s + \mu t$. ■

Πρόταση 2. (α) Αν απαλείψουμε πεπερασμένο πλήθος από τους αρχικούς όρους μιας ακολουθίας (a_n), δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(β) Αν αλλάξουμε πεπερ. πλήθος από τους αρχικούς όρους μιας (a_n), δεν επηρεάζεται η σύγκλιση ή η απόκλιση της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

[Προσοχή! Επηρεάζεται όμως το όριο!]

Απόδ. (α) Θεωρούμε μια ακολουθία (a_n) και την αντίστοιχη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Παραλείπουμε τους m πρώτους όρους της (a_n), άρα παίρνουμε την υπακολουθία (τελικό τμήμα) $(b_n = a_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$, και την αντίστοιχη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$. Θδο η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει.

Συμβολίζουμε με (S_n) την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και με (t_n) της $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Τότε: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$S_{m+n} = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) + (a_{m+1} + \cdots + a_{m+n}) =$$
$$= S_m + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_m + t_n.$$

Αφού m = σταθ., για $n \to +\infty$, παίρνουμε

(S_{m+n}) συγκλίνει στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow (t_n)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$

Όμως η (S_{m+n}) είναι τελικό τμήμα της (S_n), άρα (S_{m+n}) συγκλίνει στο $\mathbb{R} \Leftrightarrow (S_n)$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$.

(β) Εφαρμόζουμε το (α), παραλείποντας τους όρους που αλλάξαμε. ■

Παρατήρηση. Στο (α), αν $S_n \to S$ τότε $t_n \to S - S_m$.

Πρόταση 3. Αν $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R} \Rightarrow a_n \to 0$

Απόδ. Αν (S_n) είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, τότε $S_n \to S$ και $S_{n+1} \to S \Rightarrow$

$\Rightarrow s_{n+1} - s_n = a_{n+1} \to 0.$ ■

SOS! Δεν ισχύει το αντίστροφο!!!

Παράδειγμα: $a_n = 1/n \to 0$ αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.

Έχει αποδειχθεί στην Ασκ 23 / Ακολουθίες.

Πρόταση 4. Αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall m \geq n_0$

$$\left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon.$$

Απόδ. Υπόθ. $\Rightarrow s_n \to s \in \mathbb{R}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ $|s_n - s| < \varepsilon$. Έστω και τυχαίο $m \geq n_0$.

Τότε:

$$\varepsilon > |s - s_m| = \left|\lim_{n\to\infty} s_n - s_m\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \underbrace{s_{n+m}}_{\text{τελικό τμήμα της } (s_n)} - s_m\right| =$$

$$= \left|\lim_{n\to\infty} t_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{m+n}\right| =$$

$$= \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right|,$$

όπου $(b_n = a_{m+n})_{n\in\mathbb{N}}$ (βλ. Απόδ. της Πρ. 2(β)). ■

ΘΕΩΡ. (κριτήριο Cauchy)

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$

$\varepsilon > 0$ $\exists\, N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall$ $n > m \geq N$:

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

<u>Απόδ.</u> Αν (s_n) είναι η ακολουθία μερικών αθροισμάτων της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ (s_n) συγκλίνουσα $\Leftrightarrow$ (s_n) Cauchy $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > m \geq N : |s_n - s_m| < \varepsilon.$

Όμως:

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right|. \blacksquare$$

<u>Παραδείγματα.</u>

(1) $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$:

$$s_{2n-1} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{=0} + \dots + \underbrace{(a_{2n-3} + a_{2n-2})}_{=0} + a_{2n-1} =$$

$$= a_{2n-1} = -1 \to -1.$$

$$s_{2n} = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=0} + \dots + \underbrace{(a_{2n-1} + a_{2n})}_{=0} = 0 \to 0.$$

Άρα η (s_n) αποκλίνει, και η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

(2) Η <u>γεωμετρική σειρά με λόγο $x \in \mathbb{R}$</u> είναι η

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

όπου $a_k = x^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, άρα:

(i) για $x = 1 \Rightarrow s_n = n+1 \to +\infty$.

(ii) για $x \neq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, οπότε:

Αν $|x| < 1 \Rightarrow s_n \to \dfrac{1}{1-x}$, δηλ.

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

Αν $|x|>1 \Rightarrow (S_n)$ αποκλίνει.

Η περίπτωση $|x|=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$, έχει εξεταστεί.

(3) Τηλεσκοπικές σειρές. Έστω (b_n) τυχαία ακολουθία και $a_n = b_n - b_{n+1}$, $n\in\mathbb{N}$. Η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ λέγεται τηλεσκοπική. Παρατηρούμε ότι για την (S_n) της $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ισχύει:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n =$$
$$=(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \dots + (b_n - b_{n+1}) =$$
$$= b_1 - b_{n+1}$$

Οπότε (S_n) συγκλίνει $\Leftrightarrow$ (b_n) συγκλίνει και

$$\lim S_n = b_1 - \lim b_n,$$

δηλ. αν $b_n \to b$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = b_1 - b.$$

(4) Παράδειγμα τηλεσκοπικής σειράς: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.
Παρατηρούμε ότι

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = b_k - b_{k+1},$$

όπου $b_k = 1/k$. Άρα η δοθείσα σειρά είναι τηλεσκοπική με $b_n \to 0$, επομένως

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = b_1 - \lim b_n = 1.$$

(5) Η αρμονική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ αποκλίνει στο $+\infty$.
(βλ. Ακολουθίες, Ασκ. 23).